Die Lehrbücher "Eléments de Géométrie" und "Eléments d'Algèbre" von Alexis-Claude Clairaut

Eine Untersuchung über die Anwendung der heuristischen Methode in zwei mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Erziehungswissenschaften
an der Universität Dortmund

vorgelegt von
Hans-Joachim Sander, Castrop-Rauxel

Drucklegung: Juni 1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538101_0026

Die Lehrbücher "Eléments de Géométrie" und "Eléments d'Algèbre" von Alexis-Claude Clairaut

Eine Untersuchung über die Anwendung der heuristischen Methode in zwei mathematischen Lehrbüchern des 18. Jahrhunderts

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Erziehungswissenschaften
an der Universität Dortmund

vorgelegt von
Hans-Joachim Sander, Castrop-Rauxel

Drucklegung: Juni 1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referenten: Prof. Dr. Erich Wittmann
Prof. Dr. Roland Fischer
Prof. Dr. Gerd Walther

Tag der mündlichen Prüfung: 24.6.1982

Meinen Eltern

Vorwort

Im Jahr 1741 veröffentlichte der französische Mathematiker und Naturwissenschaftler Alexis-Claude CLAIRAUT[1] ein elementargeometrisches Werk unter dem Titel "Elemens de geometrie"[2], im Jahr 1746 folgte ein algebraisches unter dem Titel "Elemens d'algèbre"[2]. Beide Werke, insbesondere das geometrische, zielten nicht auf ein hohes mathematisches Niveau ab, sie waren vielmehr einzig dazu verfaßt, Anfänger in die Grundlagen der Geometrie und der Algebra einzuführen. Da es zu jener Zeit in Frankreich keine allgemeine Schulpflicht gab, waren die Werke für jeden gedacht, der sich für Mathematik interessierte und ihre Anfangsgründe kennenlernen wollte, ob er nun als Kind Privatunterricht erhielt, an einem Jesuitenkolleg unterrichtet wurde oder als Erwachsener wissenschaftlich auf dem laufenden sein wollte[3]. Verglichen mit den heutigen Verhältnissen läßt sich der mathematische Inhalt der "Elemens de geometrie" etwa dem Stoff der siebten, achten oder neunten Klasse der Sekundarstufe I zuordnen. Eine solche Zuordnung ist für die "Elemens d'algèbre" nicht mehr so eindeutig möglich: Die Gleichungen ersten und zweiten Grades gehören sicherlich zum Stoff der Sekundarstufe I, wohingegen die allgemeinen Gleichungen dritten Grades wohl für jede Schulstufe zu schwierig sind und normalerweise erst während des Mathematikstudiums behandelt werden.

Die beiden elementarmathematischen Werke CLAIRAUTs waren nicht die ersten und seinerzeit einzigen Bücher zur Einführung von

---

[1] Den Mathematikern insbesondere durch die "Clairautsche Differentialgleichung" bekannt.

[2] So die damalige Schreibweise des Titels.

[3] Die Mathematik und mehr noch die Naturwissenschaften hatten zu jener Zeit einen wesentlich höheren gesellschaftlichen Rang als heute: Selbst VOLTAIRE, mit dem CLAIRAUT gut bekannt war, verfaßte eine physikalische Abhandlung, die allerdings von keinerlei wissenschaftlichem Wert war (vgl. Kapitel 3).

Anfängern in die Anfangsgründe der Geometrie und der Algebra. Sie unterschieden sich aber von anderen Büchern durch eine völlig neue und außergewöhnliche Darstellungsform: Den "Elementen" des EUKLID konträr entgegengesetzt, entwickelte CLAIRAUT die Geometrie und die Algebra ausgehend von konkreten außermathematischen Problemen, wobei Problemlösungen nicht gleich in vollster Allgemeinheit vorgeführt, sondern schrittweise entwickelt und motiviert wurden. Mit heutigen Worten: Die Darstellung der "Elemens de geometrie" und der "Elemens d'algèbre" erfolgte in heuristisch-genetischer Weise.

Es ist klar, daß Werke dieser Darstellungsform für die heutige, zunehmend geschichtsbewußtere Mathematikdidaktik von besonderem Interesse sind. In der vorliegenden Arbeit wird daher der Versuch unternommen, diese beiden Lehrbücher umfassend zu untersuchen.

In einer ersten Phase der Beschäftigung mit dieser Arbeit standen naturgemäß die beiden Werke als solche im Mittelpunkt der Untersuchung. Wie sich aber schnell herausstellte, konnte ein volles Verständnis der beiden Bücher nicht erreicht werden, wenn nicht auch gleichzeitig der Frage nachgegangen wurde, welche Beweggründe CLAIRAUT veranlaßt haben, die beiden Elementarwerke in heuristischer Darstellungsform zu verfassen. In einer zweiten Phase der Beschäftigung mit dieser Arbeit[1] begann ich daher damit, den Werdegang CLAIRAUTs in die Untersuchungen mit einzubeziehen. Auch hier stellte ich sehr bald fest, daß der Rahmen noch weiter zu spannen war, nämlich insbesondere auch die Entwicklung sowohl der mathematischen als auch der naturwissenschaftlichen Methode sowie der "Zeitgeist" der Mitte des 18. Jahrhunderts ("Aufklärung") mit einbezogen werden mußten.

Bei den historischen Teilen der Arbeit stand ich vor der Wahl, in eigenen Worten Schilderungen, Zusammenfassungen und Kommentare zu geben, oder die Wissenschaftler jener Zeit mit ihren Originalschriften sozusagen "persönlich" zu Wort

---

[1] Diese Phase begann mit einem sechsmonatigen Aufenthalt in Paris.

kommen zu lassen und mich selbst auf verbindende und ordnende Zwischentexte zu beschränken. In Anlehnung an Oskar BECKERs "Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung" habe ich mich für die zweite Methode entschieden, da ich der Meinung war, nur so einen authentischen Eindruck des damaligen wissenschaftlichen Lebens erzeugen zu können. Ich hoffe, daß der Leser sich ein kohärentes Bild machen kann und nicht der Eindruck entsteht, es würden Zitate von Wissenschaftlern, die bereits zweihundert Jahre tot sind, einfach aneinandergereiht. Der besseren Lesbarkeit halber habe ich nahezu alle fremdsprachigen Textstellen ins Deutsche übertragen.

Abschließend möchte ich allen danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Zunächst danke ich dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für ein Stipendium zu einem sechsmonatigen Aufenthalt in Paris, ohne den wesentliche Teile dieser Arbeit nicht hätten erstellt werden können.

Während meines Aufenthalts in Paris haben mir insbesondere Herr Privatdozent Dr. J. VOSS vom Deutschen Historischen Institut Paris und Herr Professor Dr. R. TATON vom Centre International de Synthèse oft durch gezielte Hinweise sehr geholfen. Stellvertretend für alle, die mich in Paris unterstützt haben, gilt ihnen mein aufrichtiger Dank.

Weiterhin danke ich den Mitgliedern des Instituts für Didaktik der Mathematik an der Universität Dortmund, insbesondere Herrn Prof. Dr. G. WALTHER (jetzt Pädagogische Hochschule Kiel), für klärende Hinweise und Gespräche.

Besonders zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor Dr. E. WITTMANN, der diese Arbeit von Anfang an begleitet hat. Es wären etliche Hinweise in der Arbeit notwendig, um auf seine Hilfen, Ideen und Kritiken im einzelnen hinzuweisen. Insbesondere danke ich ihm für die große Freiheit, die er mir bei der Anfertigung dieser Arbeit gewährt hat, und für seine fortwährende positive Motivation, ohne die es mir sicherlich wesentlich schwerer gefallen wäre, diese Arbeit zu vollenden.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
0 Einleitung	1
1 Übersicht über die Inhalte der Lehrbücher unter besonderer Berücksichtigung ihres heuristischen Aufbaus	10
1.1 Vorbemerkung	10
1.2 Elêments de gêométrie	12
1.2.1 Vorbemerkungen	12
1.2.2 Zusammenfassung der "Eléments de géométrie" unter besonderer Berücksichtigung der angewendeten heuristischen Strategien	14
1.2.2.1 Vorwort	14
1.2.2.2 *Erster Teil. Über die natürlichsten Mittel, zur Landvermessung zu gelangen*	19
1.2.2.3 *Zweiter Teil. Über die geometrische Methode, gradlinige Figuren zu vergleichen*	35
1.2.2.4 *Dritter Teil. Über das Maß der krummlinigen Figuren und ihre Eigenschaften*	44
1.2.2.5 *Vierter Teil. Über die Methode, Körper und ihre Oberflächen zu messen*	52
1.3 Eléments d'algèbre	62
1.3.1 Vorbemerkungen	62
1.3.2 Zusammenfassung der "Eléments d'algèbre" unter besonderer Berücksichtigung der angewendeten heuristischen Strategien	64
1.3.2.1 Vorwort	65
1.3.2.2 *Erster Theil. Von der algebraischen Methode, die Aufgaben durch Gleichungen auszudrücken, und von der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.*	67

1.3.2.3 *Zweyter Theil. Von der Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade.* 84

1.3.2.4 *Dritter Theil. In welchem man einige allgemeine Grundregeln für die Gleichungen von allen Graden giebt, nebst der Methode, aus diesen Gleichungen die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade, welche sie etwan in sich haben, herzuleiten.* 90

1.3.2.5 *Vierter Theil. Von der Auflösung der Gleichungen von jeglichen Graden, wenn sie nicht mehr als zwey Glieder haben, oder wenn sie zwar drey Glieder haben, aber durch Hülfe der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade, auf zwey Glieder gebracht werden können; nebst verschiedenen um dieser Gleichungen willen anzustellenden Verrichtungen, z.E. der Erhöhung der Potenzen, der Ausziehung der Wurzeln, der Entwickelung der Wurzelgrößen, etc.* 98

1.3.2.6 *Fünfter Theil. Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade.* 107

2 Die "Eléments" im Spiegel der Meinungen zeitgenössischer und späterer Wissenschaftler 124

3 Alexis-Claude Clairaut: sein Leben, seine Werke, seine Zeitgenossen 142

4 Die Entwicklung der wissenschaftlichen Methode in Frankreich bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts 168

4.1 Vorbemerkung 168

4.2 Zur wissenschaftlichen Methode vor DESCARTES 171

4.2.1 Der Beginn der Kritik an EUKLID 171

4.2.2 Zur Wissenschaft vor DESCARTES 177

4.3 Zur Entwicklung der wissenschaftlichen Methode im 17. Jahrhundert, insbesondere bei DESCARTES 186

4.4 Antoine ARNAULD 195

4.5 Von DESCARTES zu NEWTON 198

4.6 Die allgemeine Wertschätzung der analytischen Methode in Frankreich im 18. Jahrhundert 212

4.7 Die Abneigung gegen das Systemdenken 222

4.8 Zur Kritik an EUKLID in Frankreich im 18. Jahrhundert 225

4.8.1 Anhang: zur Methodenlehre von L.-B. CASTEL 233

4.9 Zur Entstehung eines wissenschaftshistorischen Bewußtseins in Frankreich im 18. Jahrhundert 236

5 Resümee 244

Literaturverzeichnis 247

0 Einleitung

La première fonction de l'histoire est de rendre claires les situations présentes.

LE BRAS

Ich glaube, wir Mathematiker können uns es nicht leisten, die Mißverständnisse im großen Publikum hinsichtlich der Mathematik noch zu vergrößern. Diese selbstkritische Anmerkung von H. FREUDENTHAL (1963, S. 23) berührt ein zentrales Problem der Mathematik: Wie soll Mathematik dargestellt und unterrichtet werden?

Seit EUKLID etwa 300 vor Christus seine "Elemente" verfaßt hat, seit mehr als zweitausend Jahren also, wurde es mehr und mehr zum vorherrschenden Ziel, die Mathematik formal-deduktiv darzustellen. EUKLIDs "Elemente" beginnen mit Definitionen, Postulaten und Axiomen, die weder innermathematisch noch durch Anwendungsbezüge gerechtfertigt werden, danach folgen ebenfalls unmotivierte Konstruktionen und Lehrsätze.

In unserem Jahrhundert hat dieser formal-deduktivistische Aufbau eine erhebliche Straffung erfahren. Noch im vergangenen Jahrhundert oder zu Beginn dieses Jahrhunderts war der Stil recht "locker", man fand zwar - etwa in RIEMANNs Werken - ab und zu einen formulierten Lehrsatz, aber man mußte schon genau hinsehen, ob er schon bewiesen war, noch bewiesen werden sollte oder unbewiesen angenommen wurde (FREUDENTHAL 1979, S. 186). In LANDAUs "Grundlagen der Analysis" aus dem Jahr 1930 findet man hingegen kaum noch einen verbindenden Text, sondern nur noch Serien von "Definitionen", "Sätzen" und "Beweisen".

Mit dem Auftreten der französischen Mathematikergruppe Nicolas BOURBAKI in den fünfziger Jahren breitete sich der

"Landau-Stil" über die gesamte Mathematik aus. Die Stilgrenzen wurden durch eine fortlaufende Selbstbeschränkung der Mathematiker, die den Charakter einer Ideologie annahm, immer enger[1].

BOURBAKIs durchdringender Einfluß führte auch zu mathematischen Lehrbüchern und zu Vorlesungen, die nach dem deduktiven Schema aufgebaut waren und noch sind. DAVIS und HERSH beschreiben in ihrem fundamentalen Werk "The Mathematical Experience" innerhalb eines Abschnitts über den "Idealen Mathematiker" diesen Stil so: *Three pages of definitions are followed by seven lemmas and, finally, a theorem whose hypotheses take half a page to state, while its proof reduces essentially to "Apply Lemmas 1-7 to definitions A-H."* (DAVIS/HERSH 1981, S. 36.)

Eine derartige Polarisierung und Überspitzung einer bestimmten Auffassung von Mathematik konnte nicht unwidersprochen bleiben. Die zunächst interne Kritik wurde zunehmend laut geäußert. Beispielsweise findet man in (SPIVAK 1975) folgende Bemerkung: *Bourbaki is the originator of that famous pedagogical method whereby one begins with the general and proceeds to the particular only after the student is too confused to understand even that anymore.* R. OSSERMAN glaubte 1980, *that university mathematicians are already seeing signs, at the research level, of the mathematical pendulum swinging away from the highly structured Bourbaki approach ...* (OSSERMAN 1981, S. 244). Weiterhin berichtete er in seinem Vortrag auf dem IV. International Congress on Mathematical Education in Berkeley 1980, daß der Internationale Mathematikerkongress in Helsinki im Jahr 1978 von vielen als Trendwende in Richtung einer Auflockerung des

---

[1] Vgl. hierzu: Roland FISCHER, "Zur Ideologie der Selbstbeschränkung im Mathematikstudium", 1980 (Eröffnungsvortrag der 14. Bundestagung für Didaktik der Mathematik, Dortmund).

mathematischen Darstellungsstils angesehen würde[1].

Ein weiteres Indiz für eine solche Entwicklung ist die - von POLYA und POPPER angeregte - Fallstudie "Beweise und Widerlegungen", in der I. LAKATOS am Beispiel des EULERschen Polyedersatzes aufzeigt, daß der deduktivistische Darstellungsstil der eigentlich unnatürliche ist, weil Mathematik nie in deduktiver Form erfunden wird. LAKATOS 1979: *Der deduktivistische Stil verbirgt den Kampf, verbirgt das Abenteuer. Die gesamte Handlung verschwindet, die aufeinanderfolgenden tastenden Formulierungen des Satzes im Verlauf des Beweisverfahrens sind der Vergessenheit anheim gegeben, während dem Endergebnis die hohen Weihen der Unfehlbarkeit verliehen werden.*

Als bezeichnend dafür, daß bei Mathematikern gerade in den letzten Jahren eine andere Auffassung bezüglich des mathematischen Darstellungsstils aufgekommen ist, darf der interessante Umstand gelten, daß LAKATOS' Fallstudie bereits im Jahr 1963 im "British Journal for the Philosophy of Science" erschienen ist und *fünfzehn Jahre lang eine Art Untergrund-Klassiker unter Mathematikern* und Wissenschaftstheoretikern war, bevor sie größere Beachtung erlangte und diskutiert wurde (DAVIS/HERSH 1981, S. 347). DAVIS und HERSH sehen in LAKATOS' Fallstudie einen verheißungsvollen Ansatz, POPPERs Philosophie der Fallibilität jeglicher naturwissenschaftlicher Erkenntnis auch auf die Mathematik zu übertragen.

Die lockerere Auffassung zum mathematischen Darstellungsstil kommt wohlgemerkt nicht als etwas Fremdes von außen, sondern aus der Mathematik selbst. Allerdings äußern sich Mathematiker sehr selten zu der Problematik: Durch ihre eigene T ä t i g k e i t wissen sie, was Mathematik wirk-

---

[1] Diese Bemerkung ist im gedruckten Vortrag (OSSERMAN 1981) nicht enthalten; ich verdanke diesen Hinweis Herrn Wittmann.

lich ist, und als knappe Kommunikationsform unter Mathematikern hat der s y s t e m orientierte deduktivistische Stil sicherlich Vorteile.

Die Wörter "Tätigkeit" und "System" weisen auf eine Doppelbedeutung des Wortes "Mathematik" hin - ähnlich wie bei den Wörtern "Sprache", "Architektur" usw. -, die den Hintergrund aller Diskussionen um die Darstellung mathematischer Inhalte aufzuhellen hilft: "Mathematik" kann einmal einen Prozeß, zum anderen ein System meinen. Unter dem ersten, mehr dynamischen Aspekt versteht man das Wort "Mathematik", wenn man Mathematik als eine Tätigkeit betreibt. Der zweite, eher statische Aspekt ist gemeint, wenn Mathematik als fertiges System dargestellt wird, so beispielsweise in Anfängervorlesungen, Lehrbüchern und Vorträgen.

Diese Doppelbedeutung des Wortes "Mathematik" ist nicht nur der Mathematik eigentümlich, sondern jeder Wissenschaft und sogar bereits dem Wort "Wissenschaft" selbst. P. BOUTROUX charakterisiert die unterschiedliche Bedeutung der beiden Aspekte für den Lernprozeß so (BOUTROUX 1927, S. 1): *Es gibt in der Wissenschaft ein allgemeines Prinzip, das, wenn auch nicht von allen Philosophen, so doch von der großen Mehrheit der Gelehrten anerkannt wird: Nämlich die abgeschlossene Wissenschaft von der entstehenden zu unterscheiden. Mit anderen Worten, man kann nicht hoffen, die wesentlichen Züge wissenschaftlicher Erkenntnis zu erfassen, wenn man nicht weiß, wie diese Kenntnis erworben wurde; man kann die Theorie der Gelehrten nicht beurteilen, ohne vorher die Gedankengänge verstanden zu haben, denen sie entsprungen sind, und die weiteren, denen sie ihren Ausbau verdanken. Wenn dies Prinzip für alle Wissenschaften gilt, so doch vor allem für die reine Mathematik: Denn diese, die weder von der Erfahrung geleitet, noch von den Ereignissen des Lebens beeinflußt wird, hängt mehr als jede andere Wissenschaft von den Erfindungen und den Ideen ihrer Schöpfer ab.*

Diese von BOUTROUX getroffene Unterscheidung eröffnet eine Frage, die gewöhnlich erst in der Didaktik explizit berücksichtigt wird und dort von größter Wichtigkeit ist: Worin liegt der Bildungswert der Mathematik? Diese Frage wird heute durchweg dahingehend beantwortet, daß der Bildungswert der Mathematik nicht nur im Fertigprodukt Mathematik, sondern vor allem auch in der Tätigkeit des Mathematik-Betreibens liegt.

Das Bewußtsein für prozeßgebundene Ziele des Mathematikunterrichts wird aber dadurch getrübt, daß - wie oben ausgeführt - die Mathematik in der Lehrerausbildung fast ausschließlich als Fertigprodukt erfahren wird. Daher hatte und hat es der dynamische Aspekt immer schwer, in den Unterricht einzudringen. So ist es überhaupt nicht verwunderlich, daß sich BOURBAKIs Stil bis in die Schule durchgesetzt hat und dort als "Baby-Bourbaki" (KAPUR 1970) zu Schulbüchern führte, die das Schema "Definition - Satz - Beweis" höchstens durch den Einschub von "Beispielen", "Anwendungen" und "Übungsaufgaben" kindgerecht zu machen versuchten. Ein bezeichnender Hinweis auf einen derartigen hochstrukturierten Unterricht ist eine Äußerung DIEUDONNEs aus den siebziger Jahren, der es fast für ausgeschlossen hielt, *daß lineare Algebra in einem zweidimensionalen Vektorraum ein 'abstrakter' Stoff ist, den fünfzehnjährige Jungen und Mädchen geistig nicht erfassen können, wenn jeder einzelne Grundbegriff an der Tafel sichtbar gemacht werden kann und jedes Axiom eine unmittelbare intuitive Bedeutung erhält* (DIEUDONNE 1974, S. 413).

Diejenigen Mathematiker, die sich einem zwischen beiden Aspekten ausgewogenen Mathematikunterricht und pädagogischen Zielen verpflichtet fühlten, haben immer versucht, dieses einseitige Bild zurechtzurücken. René THOM in seinen Aufsätzen "'Moderne' Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum?" aus dem Jahr 1970 und "Moderne Mathematik: Gibt es das?" aus dem Jahr 1973, H. FREUDENTHAL in seinem grundlegenden Aufsatz "Was ist Axiomatik, und

welchen Bildungswert kann sie haben?"aus dem Jahr 1963 und Georg POLYA in seinen Werken "Vom Lösen mathematischer Aufgaben", "Mathematik und plausibles Schließen" und "Schule des Denkens" haben eine Reihe von eindringlichen Argumenten zugunsten des genetischen Darstellungsstils genannt - einer Darstellung, die *an den natürlichen ... Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist* (WITTMANN 1980, S. 130). Der Schüler soll nicht nur die fertige Mathematik kennen, sondern er soll wissen: *Es fängt bei jeder neuen Aufgabe irgendwie mit Probieren an, mit versuchsweisen Konstruktionen, und hat man es dann irgendwie gefunden, so reflektiert man über den Weg dahin, man schneidet Umwege ab, man eliminiert Überflüssiges, vollzieht Sichtwechsel, ordnet um, bezieht das Neue auf eher Gefundenes, spezialisiert und generalisiert. Und all das ist eine Tätigkeit, die man nicht nur ausübt, sondern über die man auch wieder reflektieren kann, soll* (FREUDENTHAL 1979, S. 198-199).

Die Diskussion um das rechte Bild der Mathematik im Unterricht wird nicht erst heute geführt, sondern läßt sich noch weit zurückverfolgen: Um die Jahrhundertwende haben sich Felix KLEIN und Alfred PRINGSHEIM harte, teilweise sogar polemische Diskussionen auf den Tagungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung geliefert, wobei KLEIN eindringlich für das "genetische Prinzip" als leitendes Prinzip des Mathematikunterrichts eintrat, wohingegen PRINGSHEIM den Nutzen des Mathematikunterrichts unter anderem darin sah, daß er dem Schüler *das Beispiel einer wirklichen Wissenschaft, als eines Inbegriffs wohlerworbener und systematisch verknüpfter Erkenntnisse gibt* (PRINGSHEIM 1904, S. 374; Hervorhebung von mir).

Felix KLEIN wird oft als derjenige angesehen, der die genetische Methode in bezug auf den Mathematikunterricht explizit zum ersten Mal artikuliert hat. Dies ist aber nicht richtig. G. SCHUBRING hat das genetische Prinzip 1977 über F. KLEIN bis ins 17. Jahrhundert zurückverfolgt, wo es

im Sinne einer methodologischen Orientierung ... zusammen mit dem naturwissenschaftlich-mathematischen Denken der Neuzeit ... und als ein wesentlicher Bestandteil dieses Denkens entstanden ist (SCHUBRING 1977, S. E 1)[1]. Ferner wies SCHUBRING nach, daß das genetische Prinzip als pädagogisches Konzept zum ersten Mal zu Beginn des 19. Jahrhunderts auftrat, sich aber auch damals gegenüber dem formalen Darstellungsstil nicht durchsetzen konnte.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als historische Fallstudie innerhalb der Diskussion um die Darstellung von Mathematik. Sie befaßt sich mit zwei mathematischen Lehrbüchern in heuristisch-genetischer Darstellung, die von einem der besten Mathematiker des 18. Jahrhunderts, Alexis-Claude CLAIRAUT, verfaßt worden sind.

Mit einer solchen historischen Analyse werden mehrere Ziele verfolgt: erstens lassen sich mit ihrer Hilfe Argumente gewinnen für die Diskussion um den Darstellungsstil, zweitens können die analysierten Werke als Vorbild und Ermunterung für heuristische Darstellungen dienen, drittens kann eine solche Analyse - entsprechend den eingangs zitierten Worten von LE BRAS - Aufschluß über den eigenen Standpunkt liefern.

Die Bedeutung CLAIRAUTs für die heutige Diskussion - zumindest in Frankreich - charakterisiert G. WALUSINSKI in seinem Artikel "Au pays de Clairaut et de Bourbaki" in "L'enseignement mathématique" aus dem Jahr 1957, indem er CLAIRAUT und BOURBAKI einander gegenüberstellt (WALUSINSKI 1957): *Meiner Ansicht nach gibt es in den aktuellen Bemühungen der Lehrer zwei Strömungen, die gar nicht so unterschiedlich sind, wie es zunächst scheint, sondern von denen ich im*

---

[1] SCHUBRING beklagt übrigens zu Recht *das Fehlen der historischen Dimension in der gegenwärtigen Mathematik-Didaktik. Diese Dimension fehlt so vollständig, daß bisher meines Wissens nicht einmal ihr Fehlen konstatiert worden ist* (SCHUBRING 1977, S. A 2-3).

Gegenteil glaube, daß eine Art dialektischer Synthese einer großen Erneuerung unserer Pädagogik den Weg öffnen wird. Die erste dieser Strömungen stellt sich durch die Bedeutung und die Zahl der Arbeiten, die sie hervorrief, durch das Ansehen, das sie bei einer großen Zahl von Lehrern genießt, unter die Fahne der Axiomatik. Sagen wir der Einfachheit halber, daß es sich um die "Schule von Bourbaki" handelt. Die zweite Strömung setzt den Akzent auf die Bildung abstrakter Begriffe ausgehend von der Beobachtung der realen Welt und auf die Rückführung der allgemeinen Kenntnisse auf die praktischen Anwendungen; sagen wir, um wiederum zu vereinfachen, daß es sich um die "Schule von Clairaut" handelt.

Um den erwähnten Zielen einer historischen Analyse gerecht zu werden, sollen in der vorliegenden Arbeit die beiden Lehrbücher vorgestellt werden - in der Hoffnung, daß sie als Fundgrube von Material für den heutigen Unterricht dienen können -, und es soll untersucht werden, warum ein Mathematiker des 18. Jahrhunderts Lehrbücher in heuristischer Darstellungsform verfaßt hat.

In Kapitel 1 wird der Inhalt der beiden Lehrbücher sehr detailliert wiedergegeben, zum einen wegen der eben bereits erwähnten Hoffnung, Eingang in den heutigen Unterricht finden zu können, zum anderen, da nur bei einer detaillierten Wiedergabe die eigentümliche Darstellungsform zum Ausdruck kommt.

Kapitel 2 befaßt sich mit der Reaktion auf CLAIRAUTs Lehrbücher, nicht nur zu seinen Lebzeiten, sondern auch nach der Französischen Revolution und noch in unserem Jahrhundert.

In Kapitel 3 wird versucht, ein Persönlichkeitsbild von Alexis-Claude CLAIRAUT unter Berücksichtigung seiner Zeitgenossen zu zeichnen, das seine Beweggründe für die Wahl der heuristischen Darstellungsform zutage treten läßt.

In Kapitel 4 schließlich wird die in Kapitel 3 begonnene Untersuchung unter allgemeinerem Aspekt fortgesetzt. Da

CLAIRAUT ein französischer Mathematiker des 18. Jahrhunderts war, wurde er sicherlich - bewußt und unbewußt - beeinflußt von wissenschaftlichen und speziell wissenschaftsmethodischen Entwicklungen seiner Zeit. Auf der anderen Seite hatte sicherlich auch der allgemeine "Zeitgeist" der Epoche, die Aufklärung in Frankreich, einen Einfluß auf ihn, so daß auch Wechselwirkungen zwischen "Aufklärung" und "Wissenschaft" im 18. Jahrhundert zu untersuchen sind.

Da es keine festen Grenzen zwischen der persönlichen Sphäre (Kapitel 3) und dem wissenschaftlichen Umkreis (Kapitel 4) gibt, treten notwendigerweise einige Überlappungen der beiden Kapitel auf. Dies hat den Vorteil, daß Beziehungen zwischen den beiden Bereichen stärker hervortreten.

1 Übersicht über die Inhalte der Lehrbücher unter besonderer Berücksichtigung ihres heuristischen Aufbaus

1.1 Vorbemerkung

In diesem Kapitel werden die Lehrbücher "Elêments de géométrie" und "Eléments d'algèbre" aus drei Gründen sehr ausführlich dargestellt. Zum einen gehe ich davon aus, daß die Bücher den meisten Lesern nicht oder allenfalls in französischer Sprache zugänglich sind. Andererseits halte ich beide Werke, insbesondere das Geometriebuch, auch für sehr ergiebig für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Drittens läßt sich ohne eingehende Darstellung des Inhalts nur sehr schwer die Durchgängigkeit der heuristischen Darstellungsform illustrieren. Die Zusammenfassung der Inhalte läßt sich nicht von der eigentlichen heuristischen Analyse trennen, da bereits die Wiedergabe des Inhalts oft die gewählte Darstellungsform klar zutage treten läßt. An einigen Stellen des Werkes, die geeignet sind, exemplarisch die besondere Darstellungsform zu veranschaulichen, oder die mir heuristisch besonders gut gelungen erschienen, folgt eine intensivere Analyse unter dem Aspekt der Anwendung heuristischer Methoden.

Die bei dieser heuristischen Analyse eingehenden Methoden lassen sich alle unter die drei Hauptbegriffe "Spezialisieren", "Verallgemeinern" und "Analogisieren" subsummieren. Im folgenden sollen diese Begriffe in enger Anlehnung an die von POLYA gegebenen Definitionen verstanden werden (POLYA 1969, S. 33-35).
POLYA versteht unter "Verallgemeinern", *von der Betrachtung eines gegebenen Aggregats von Objekten zu der eines größeren Aggregats übergehen, welches das gegebene enthält.* Dies

geschieht beispielsweise dann, wenn man beim Satz des PYTHAGORAS von den über den Seiten errichteten Quadraten übergeht zu allgemeinen kongruenten Polygonen, die entsprechend über den Dreiecksseiten errichtet sind. Verallgemeinert wird beim Aufgabenlösen aber auch dann, wenn eine oder mehrere der im Problem gegebenen Bedingungen fortgelassen werden, da die Lösungsmenge des neuen Problems diejenige des alten Problems umfaßt.
Analog zur Definition des Begriffs "Verallgemeinern" heißt für POLYA "Spezialisieren", *von der Betrachtung eines gegebenen Aggregats von Objekten übergehen zu der eines kleineren Aggregats, das in dem gegebenen enthalten ist.* Spezialisiert wird eine Betrachtung beispielsweise dadurch, daß man von allgemeinen ebenen Polygonen zu Dreiecken übergeht. Entsprechend der eben gemachten Bemerkung beim Verallgemeinern spezialisiert man beim Aufgabenlösen auch dann, wenn zu den im Problem genannten Bedingungen eine oder mehrere weitere hinzugefügt werden, beispielsweise wenn bei der Berechnung des Pyramideninhalts die zusätzliche Bedingung gestellt wird, daß die Grundseiten der Pyramiden Quadrate sein sollen.

Beide Problemlösestrategien werden - gemäß POLYA - oft in extremer Weise benutzt, indem man beim Verallgemeinern oft von einem einzigen Objekt zu einer ganzen Klasse von Objekten übergeht bzw. man beim Spezialisieren umgekehrt von einer Klasse von Objekten zu einem einzigen Objekt zurückgeht.

Die Definition des Begriffs "Analogie" bereitet mehr Schwierigkeiten als die Definition der ersten beiden Begriffe, denn *die Begriffe der Verallgemeinerung und der Spezialisierung haben nichts Unbestimmtes, nichts Fragliches an sich.* Für POLYA ist *Analogie ... eine Art von Ähnlichkeit,* die sich aber durch die *Absichten dessen, der die Ähnlichkeitsbetrachtung anstellt,* von den anderen Ähnlichkeitsarten unterscheidet. Diese Relativität bzgl. der Absichten des Betrachters geht in POLYAs Definition der Analogie ein:

Zwei Systeme sind analog, wenn sie miteinander in bezug auf klar definierbare Beziehungen zwischen ihren sich jeweils entsprechenden Teilen übereinstimmen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß beim Problemlösen selten eine der drei genannten Methoden als einzige ohne die beiden anderen eingehen wird. Dies wird sich insbesondere auch bei der folgenden Analyse der Lehrbücher zeigen.

1.2 Elêments de géométrie

1.2.1 Vorbemerkungen

Die "Eléments de géométrie" erschienen im Jahr 1741 unter dem Originaltitel "Elemens de geometrie". Diese "Anfangsgründe der Geometrie" sind das erste der beiden Lehrbücher, die CLAIRAUT geschrieben hat.

Die Ausgabe von 1741[1] hatte vier Auflagen, neben der von 1741 - bei zwei verschiedenen Verlegern, David fils und Lambert & Durand - die zweite im Jahr 1753, ebenfalls parallel bei David und bei Durand, die dritte 1765 bei Durand neveu und bei der Compagnie des Libraires sowie die vierte im Jahr 1775 bei Durand. Als neue Ausgabe erschienen die "Elêments de géométrie" 1830 bei Bachelier und im Jahr 1852 als Nachdruck bei L. Hachette sowie weitere Auflagen der letzteren Ausgabe 1853, 1857 und 1861. Ebenfalls 1853 erschienen bei J. Delalain die "Eléments de géométrie, nouv. éd. mise en accord avec le système décimal par M. Honoré Regodt". Der letzte Abdruck der "Eléments de géométrie" erschien schließlich 1920 bei Gauthier-Villars in der Reihe "Les maîtres de la pensée scientifique". Dieser Ausgabe von 1920 liegt die Auflage von 1765 zugrunde, die - bis auf

---

[1] Die folgenden Ausführungen über Neuauflagen und Übersetzungen sind zum größten Teil entnommen aus: René Taton, "Inventaire chronologique de l'oeuvre d'Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)," *Revue d'Histoire des Sciences*, 1976-XXIX/2, 97-122.

einige Neuerungen im Ausdruck (Vorbemerkungen der Ausgabe von 1920, S. VIII) - unverändert geblieben ist. Der folgenden Zusammenfassung des Inhalts der "Eléments de géométrie" liegt die Ausgabe von 1920 zugrunde[1].

Die "Eléments de géométrie" sind schon früh in sehr viele Sprachen übersetzt worden. Bereits im Jahr 1744 findet man eine schwedische Übersetzung, erschienen in Stockholm, die 1760, ebenfalls dort, sogar ein zweites Mal aufgelegt wurde. Im Jahr 1749 folgte als "Elementa geometriae ..." eine lateinische Übersetzung, herausgegeben von J.B. Recurti in Venedig. Eine italienische Übersetzung folgte zwei Jahre später, im Jahr 1751, als "Elementi di geometria ...", übersetzt von V. Monaldini, erschienen in Rom. Wiederum zwei Jahre später übersetzte F.J. Bierling die "Eléments de géométrie" ins Deutsche, die Übersetzung erschien als "Anfangsgründe der Geometrie" 1753 in Hamburg bei Herold. Eine Neuausgabe dieser Übersetzung erschien, ebenfalls in Hamburg, im Jahr 1773. Im Jahr 1790 erschien die 5. Auflage, in der Übersetzung von J. Reimers, ebenfalls in Hamburg.

Etwa zwanzig Jahre später folgte eine weitere Übersetzung: Im Jahr 1772 wurden die "Eléments de géométrie" erstmalig ins Polnische übersetzt als "Poczatki geometryi ...", erschienen in Wilno. Und in den Jahren 1856-57 erschien eine neue Übersetzung ins Polnische, "Zasady geometryi ...", in Warschau bei Gazety Codziennej.

Erst im 19. Jahrhundert wurden die "Eléments de géométrie" als englische Übersetzung herausgegeben: Im Jahr 1836 erschienen die "Elements of geometry ..." bei M. Goodwin & Co in Dublin und wurden 1851 und 1852 noch einmal aufgelegt. Eine neue englische Übersetzung von J, Kaines erschien schließlich im Jahr 1881 bei C. Kegan Paul & Co.

---

[1] Soweit nicht anders angegeben, sind die in Teil 1.2.2 enthaltenen Zitate von mir ins Deutsche übersetzt.

1.2.2 Zusammenfassung der "Elêments de géométrie" unter besonderer Berücksichtigung der angewendeten heuristischen Strategien

Dem etwa sechsseitigen Vorwort folgen vier etwa dreißig bis sechzig Seiten lange Teile mit den Titeln

1. *Über die natürlichsten Mittel, zur Landvermessung zu gelangen,*
2. *Über die geometrische Methode, gradlinige Figuren zu vergleichen,*
3. *Über das Maß der krummlinigen Figuren und ihre Eigenschaften,*
4. *Über die Methode, Körper und ihre Oberflächen zu messen.*

Jeder dieser Teile ist in kurze, höchstens drei Seiten lange, manchmal auch nur aus einem einzigen Satz bestehende Abschnitte unterteilt, die römisch numeriert sind[1]. In der Ausgabe von 1920 ist fast allen Abschnitten eine Überschrift vorangestellt, die zum Teil den jeweiligen Lehrsatz des Abschnitts nennt, zum Teil informiert über das, was der Abschnitt mit sich bringt, oder auch das Problem nennt, das in dem Abschnitt behandelt wird. Diesen vorangestellten Satz werde ich im folgenden "Leitsatz" nennen. In der ursprünglichen Ausgabe von 1741 war der Leitsatz dem Abschnitt nicht als Überschrift vorangestellt, sondern befand sich neben dem eigentlichen Text des Abschnitts in kleinerem Druck auf dem Rand der Seite.

1.2.2.1 Vorwort

Im Vorwort der 1741 erschienenen "Elêments de géométrie" wird EUKLID zwar selten erwähnt, seine Methode wird hingegen schon im ersten Abschnitt kritisiert. Da außer den Vorworten der Lehrbücher meines Wissens keine weiteren Aussa-

---

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit gebe ich im folgenden die Nummern der Abschnitte mit arabischen Ziffern wieder.

gen von CLAIRAUT zur Didaktik erhalten sind, möchte ich im folgenden das vollständige, ins Deutsche übersetzte Vorwort der "Eléments de géométrie" wiedergeben:

Obwohl die Geometrie an sich abstrakt ist, muß man einräumen, daß die Schwierigkeiten, die sich Anfängern stellen, in den meisten Fällen von der Art und Weise herrühren, wie sie in den normalen Lehrbüchern für Anfänger gelehrt wird. Man fängt dort immer mit einer großen Anzahl von Definitionen, von Postulaten, von Axiomen und von vorläufigen Prinzipien an, die dem Leser nichts als trockenen Lehrstoff zu versprechen scheinen. Die Lehrsätze, die dann kommen, richten den Geist in keiner Weise auf den interessantesten Gegenstandsbereich und sind überdies sehr schwer zu begreifen, so daß die Anfänger sich gewöhnlich langweilen und sich abstoßen lassen, bevor sie überhaupt auch nur eine konkrete Vorstellung haben von dem, was man ihnen beibringen will.

Um diese Trockenheit, die man von Natur aus dem Studium der Geometrie zuspricht, zu vermeiden, haben sich in der Tat einige Autoren überlegt, im direkten Anschluß an jeden grundlegenden Lehrsatz den möglichen Gebrauch in der Praxis zu bringen; aber dadurch beweisen sie die Anwendbarkeit der Geometrie, ohne sehr die Möglichkeit zu erleichtern, sie zu erlernen. Da jeder Lehrsatz immer seiner Anwendung vorausgeht, kommt der Geist erst dann auf sinnlich wahrnehmbare Begriffe zurück, nachdem er große Strapazen beim Erlernen der abstrakten Begriffe ausgestanden hat.

Einige Gedanken, die ich mir über die Anfänge der Geometrie gemacht habe, ließen mich hoffen, diese Unannehmlichkeiten zu vermeiden, und zwar durch Verbindung der beiden Vorzüge, die Anfänger zu interessieren und sie zu belehren. Ich habe mir gedacht, daß diese Wissenschaft, wie alle anderen auch, sich Schritt für Schritt formiert haben muß; daß wahrscheinlich aus einem gewissen Bedürfnis heraus die ersten Schritte unternommen wurden, und daß diese ersten Schritte für Anfänger nicht zu hoch sein könnten, weil es ja Anfänger waren, die sie zuerst gemacht haben.

Eingenommen von dieser Idee, habe ich mir vorgenommen, zur möglichen Geburtsstätte der Geometrie zurückzukehren; und ich habe mich bemüht, von da aus die Prinzipien zu entwikkeln mittels einer Methode, die natürlich genug ist, um als diejenige der ersten Erfinder gelten zu können, wobei ich einzig darauf achte, die fehlerhaften Versuche zu vermeiden, die jene notwendigerweise machen mußten.
Das Ausmessen des Geländes schien mir am geeignetsten, um die ersten Grundsätze der Geometrie entstehen zu lassen; und das ist in der Tat der Ursprung dieser Wissenschaft, da ja "Geometrie" Landvermessung bedeutet. Einige Autoren behaupten, daß die Ägypter, die fortlaufend die Grenzen ihrer Erbteile durch die Überschwemmungen des Nil zerstört sahen, die ersten Grundlagen der Geometrie legten, indem sie Mittel suchten, sich genau der Situation, der Ausdehnung und der Gestalt ihrer Besitztümer zu vergewissern. Aber selbst wenn man sich hierüber nicht auf diese Autoren bezieht, kann man wenigstens nicht bezweifeln, daß die Menschen schon in den Anfangszeiten Methoden gesucht hätten, ihre Länder zu vermessen und aufzuteilen. Da sie diese Methoden in der Folge vervollkommnen wollten, führten die einzelnen Untersuchungen sie Schritt für Schritt zu allgemeineren Untersuchungen; und als sie sich schließlich vorgenommen hatten, den genauen Zusammenhang aller Arten von Größen kennenzulernen, organisierten sie eine Wissenschaft über einen viel ausgedehnteren Gegenstandsbereich, als jener, den sie zunächst in Angriff genommen hatten, deren Namen sie jedoch beibehielten, den sie ihr am Anfang gegeben hatten.
Um in diesem Werk einem Weg zu folgen, der dem der Erfinder gleicht, bin ich zunächst darauf bedacht, die Anfänger die Prinzipien entdecken zu lassen, von denen die einfache Landvermessung abhängen kann, sowie die Messung erreichbarer und unerreichbarer Entfernungen, usw. Von da gehe ich zu anderen Untersuchungen über, die mit den ersten eine derartige Analogie haben, daß die natürliche Neugierde alle

Menschen antreibt, sich damit zu beschäftigen; und indem ich diese Neugierde durch einige nützliche Anwendungen rechtfertige, gelange ich dahin, die Anfänger alles das durchlaufen zu lassen, was die elementare Geometrie darüber hinaus zu bieten hat. Man kann wohl nicht abstreiten, daß diese Methode zumindest als Motivation für diejenigen geeignet ist, die durch die Trockenheit der geometrischen Wahrheiten ohne jegliche Anwendungen abgestoßen würden; wie ich hoffe, wird aber von noch größerem Nutzen sein, daß sie den Geist an das Suchen und an das Entdecken gewöhnen wird; denn ich vermeide sorgfältig, irgendeinen Grundsatz direkt in der Form "Satz - Beweis" anzugeben, mit anderen Worten zu behaupten, daß diese oder jene Aussage gilt, ohne zu zeigen, auf welchem Weg man sie entdeckt hat..

Wenn die ersten Urheber der Mathematik ihre Entdeckungen in der Form "Satz - Beweis" präsentiert haben, dann ohne Zweifel deshalb, um ihren Werken ein vortrefflicheres Aussehen zu geben, oder um die Mühseligkeit zu vermeiden, die Gedankenfolge wiederzugeben, der sie bei ihren Untersuchungen gefolgt sind. Wie dem auch sei, es schien mir viel angemessener, meine Leser fortlaufend mit der Lösung von Problemen zu beschäftigen; das heißt, die Mittel zu suchen, irgendeine Operation auszuführen, oder irgendeine unbekannte Wahrheit zu entdecken, indem sie das Verhältnis zwischen den gegebenen und den unbekannten Größen, die man finden will, bestimmen. Indem sie diesem Weg folgen, lernen die Anfänger bei jedem Schritt, den man sie machen läßt, den Beweggrund des Erfinders hierfür kennen; und dadurch können sie leichter das Wesen des Erfindens erwerben.

Man wird mir vielleicht vorwerfen, an einigen Stellen dieser Grundlagen mich zu sehr auf die Anschauung zu beziehen, und nicht genug auf die strenge Exaktheit der Beweise bedacht zu sein. Ich bitte jene, die mir solch einen Vorwurf machen könnten, zu beachten, daß ich nur über die Sätze oberflächlich hinweggehe, deren Wahrheit offenbar wird, wenn man auch nur ein bißchen genau hinschaut. Davon mache ich auf diese Weise Gebrauch, vor allem am Anfang, wo oft

Grundsätze dieses Typs auftreten, weil ich beobachtet habe, daß jene, die Neigung zur Geometrie hatten, hernach Gefallen daran fanden, ein bißchen ihren Verstand zu üben; und daß auf der anderen Seite sie abgestoßen wurden, wenn man sie mit sozusagen nutzlosen Beweisen überhäufte.
Euklid hat sich die Mühe gemacht zu beweisen, daß zwei Kreise, die sich schneiden, nicht denselben Mittelpunkt haben, daß ein Dreieck, das in einem anderen eingeschlossen ist, einen kleineren Gesamtumfang hat als jenes, in dem es liegt; darüber wird man nicht überrascht sein. Diese Geometrie hatte die eigensinnigen Sophisten zu überzeugen, die dadurch Ruhm erwarben, daß sie sich den offensichtlichsten Wahrheiten verweigerten: Daher brauchte damals die Geometrie, ebenso wie die Logik, die Unterstützung durch formale Vernunftschlüsse, um der Schikane den Mund zu schließen. Aber die Dinge haben ein ganz anderes Gesicht bekommen. Jedes Schlußfolgern über Sachverhalte, die bereits der gesunde Menschenverstand schon vorher erkannt hat, ist heute ein reiner Verlust, und nur geeignet, die Wahrheit zu verdunkeln und bei den Lesern Widerwillen zu erregen.
Man könnte mir den Vorwurf machen, verschiedene Lehrsätze ausgelassen zu haben, die ihren Platz in den normalen Lehrbüchern für Anfänger haben, und mich bei der Behandlung der Proportionen damit zufriedenzugeben, sie nur grob zu skizzieren.
Darauf antworte ich, daß man in dieser Abhandlung all das findet, was nützlich sein kann, um mein Vorhaben auszuführen, daß die Lehrsätze, die ich vernachlässige, jene sind, die aus sich selbst heraus keinerlei Nützlichkeit besitzen, und die außerdem nicht dazu beitragen können, das Verständnis jener Sätze, deren Unterrichtung wichtig ist, zu erleichtern: daß hinsichtlich der Proportionen das, was ich darüber gesagt habe, genügen muß, um die elementaren Sätze, die sie zur Voraussetzung haben, zu verstehen. Das ist ein Thema, das ich gründlicher in den "Anfangsgründen der Algebra" behandeln werde, die ich folgen lassen werde.
Da ich die Landvermessung gewählt habe, um die Anfänger zu

interessieren, muß ich mich, abschließend bemerkt, nicht davor fürchten, daß man diese Grundlagen nicht mit den normalen Abhandlungen über Feldvermessung verwechselt? Dieser Gedanke kann nur jenen kommen, die nicht beachten, daß die Landvermessung in keiner Weise der wahre Gegenstand dieses Buchs ist, sondern daß sie mir als Gelegenheit dient, die grundlegenden geometrischen Wahrheiten entdecken zu lassen. Ich hätte ebenso die Möglichkeit gehabt, zu diesen Wahrheiten zu gelangen, indem ich die Geschichte der Physik, der Astronomie oder jedes anderen Teilbereichs der Mathematik, den ich auswählen wollte, hergenommen hätte; aber dann hätte die Vielzahl fremder Ideen, mit denen man sich beschäftigen müßte, die geometrischen Ideen gleichsam erstickt, auf die allein ich den Geist des Lesers lenken mußte.

Die Motive CLAIRAUTs sind also im wesentlichen pädagogisch-psychologischer Natur: Er will die Anfänger nicht durch eine große Anzahl von unverständlichen Definitionen, Postulaten, Axiomen und vorläufigen Prinzipien abschrecken, sondern er will sie diese Definitionen, Postulate, Axiome und Prinzipien, ausgehend von konkreten Bedürfnissen des Menschen, selbst entdecken lassen. Diese Methode ermöglicht nicht nur einen psychologisch leichteren Zugang zur Mathematik, sondern sie ist darüber hinaus pädagogisch wertvoller, da *sie den Geist an das Suchen und an das Entdecken gewöhnen wird* und damit schon dem Anfänger den dynamischen, umfassenderen Aspekt der Mathematik zugänglich macht.

1.2.2.2 *Erster Teil. Über die natürlichsten Mittel, zur Landvermessung zu gelangen*

Da als erstes wahrscheinlich Längen und Entfernungen gemessen werden mußten, heißt es in Abschnitt 1: *Um eine beliebige Länge zu messen, ... muß man sie mit einer bekannten Länge vergleichen.* Leitsatz 2 besagt: *Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte, und demzufolge das Maß der Entfernung zwischen zwei Punkten.* Auf die Begrün-

dung dieses Satzes geht CLAIRAUT in Abschnitt 2 nicht näher ein, sondern verweist nur auf die unmittelbare Anschauung, daß *alle anderen* (Linien), *die notwendigerweise eine mehr oder weniger große Krümmung haben, länger sind als die gerade Linie, die keinerlei Krümmung hat.*

Die nächsten fünf Abschnitte beschäftigen sich mit einer der einfachsten und wichtigsten Beziehungen zwischen zwei Linien, dem Senkrechtstehen, sowie mit der Konstruktion aufeinander senkrecht stehender Linien. Leitsatz 3 definiert anschaulich: *Eine Linie, die auf eine andere stößt, ohne sich mehr zu irgendeiner Seite dieser anderen Linie zu neigen, steht senkrecht auf dieser Linie.* Diese Definition wird in Abschnitt 3 plausibel gemacht anhand eines Beispiels, bei dem die Entfernung eines Punktes an einem (geradlinigen) Ufer eines Flusses vom anderen (ebenfalls geradlinigen, dazu parallelen) Flußufer gemessen werden soll. Da offensichtlich diejenige Strecke die kürzeste ist, die sich zu keiner Seite des Flußufers mehr neigt, ergibt sich damit nun das Problem, Senkrechten zeichnen bzw. im Gelände konstruieren zu können[1].

Um die Notwendigkeit einer Lösung dieses Problems noch deutlicher herauszustellen, werden in Abschnitt 4 die Begriffe "Rechteck" und "Quadrat" eingeführt. Leitsatz 4: *Das Rechteck ist eine Figur aus vier Seiten, die senkrecht aufeinander stehen, und das Quadrat ist ein Rechteck, dessen vier Seiten gleich lang sind.* Daß das oben genannte Problem, Senkrechten zeichnen zu können, ein häufig auftretendes ist, wird in Abschnitt 4 so verdeutlicht, daß einfache Figuren wie Rechtecke und Quadrate bei der Konstruktion von Häusern, von Zimmern, von Gärten usw. auftreten.

Nachdem die Notwendigkeit einer Lösung dieses Problems nun hinreichend deutlich geworden ist, behandelt Abschnitt 5 *die Methode, wie man eine Senkrechte errichtet* (Leitsatz 5). Die zugehörige geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist ebenso bekannt wie diejenige von Abschnitt 7:

---

[1] Dem Leser wird empfohlen, im folgenden die beschriebenen Konstruktionen mitzuzeichnen, um ihre Entwicklung anhand von eigenen Zeichnungen besser verfolgen zu können.

Die Methode, wie man ein Lot fällt (Leitsatz 7).
Abschnitt 6 beschreibt die bei der Lösung der oben genannten Probleme auftretenden Hilfslinien (Leitsatz 6): *Der Kreis ist die vollständige Spur, die die bewegliche Spitze eines Zirkels beschreibt, während sie sich um die andere Spitze dreht. - Der Mittelpunkt ist der Ort der festliegenden Spitze. - Der Durchmesser ist das Doppelte des Radius.*

Die Bewältigung des Problems "Senkrechten zeichnen" (im folgenden mit "P" bezeichnet) scheint mir unter dem Aspekt der Anwendung heuristischer Strategien besonders interessant zu sein. Indem CLAIRAUT dem Problem P nacheinander zwei weitere Bedingungen hinzufügt, erreicht er eine dichotomische Aufspaltung von P in P_1 "Senkrechten errichten" (Abschnitt 5) und P_1' "Lote fällen" (Abschnitt 7): *Bei den verschiedenen Operationen, die verlangen, daß man Senkrechten zeichnet, handelt es sich entweder darum, sie von einem Punkt außerhalb zur Linie zu zeichnen, oder sie in einem Punkt der Linie zu errichten* (Abschnitt 5). Die Einzelprobleme P_1 und P_1' lassen sich wahrscheinlich leichter bewältigen als das komplexe Problem P. Da P_1 ebenfalls nicht direkt gelöst werden kann, wird es spezialisiert zum Problem P_2 "Errichten einer Senkrechten in der Mitte einer Strecke". Dieses Problem ist nun mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösbar. Die Methode der Lösung von P_2 wird anschließend nun verwendet, um P_1 und auch P_1' und somit insgesamt P zu lösen. Die Lösung von P_1 ergibt sich in einfacher Weise mit der Lösung von P_2: Auf der Strecke, auf der die Senkrechte errichtet werden soll, läßt sich mit Hilfe des Zirkels immer eine Teilstrecke abtragen, in deren Mitte die Senkrechte errichtet werden soll. Und die Lösung von P_1' ergibt sich schließlich durch Umkehrung der Methode der Lösung von P_2: Wurde bei P_2 mit Hilfe des Zirkels ein Punkt außerhalb der Strecke konstruiert, der mit dem Fußpunkt verbunden die Senkrechte lieferte, so liefert beim Problem P_1' der außerhalb der Strecke vorgegebene Punkt als Mittelpunkt eines Kreises eine Strecke auf der Linie, durch deren Mittelpunkt das Lot gehen muß. Auf diese Strecke wird also noch

einmal das Verfahren von P_2 angewendet.

Mit der Lösung des Problems P ist dieser Problemkreis für CLAIRAUT aber noch nicht abgeschlossen. Unter heuristischem Aspekt sehr interessant ist die weitere Problemgenerierung (vgl. POLYAs Frage: "Kennst Du eine verwandte Aufgabe?"[1]): Nachdem die Lösungsmethode des Problems P_2 dazu gedient hat, das Problem P insgesamt zu lösen, werden nun in den folgenden Abschnitten 8, 9, 10 und 11 weitere Probleme gesucht, die mit Hilfe der Lösungsmethode oder der Lösungsresultate des Problemkreises P gelöst werden können. Es sind dies die Probleme *Aufteilen einer Linie in zwei gleiche Teile, Konstruktion eines Quadrats, wenn man eine Seite vorgegeben hat,* und *Konstruktion eines Rechtecks, dessen Länge und Breite vorgegeben sind.* CLAIRAUT macht in diesen Abschnitten explizit auf diese Methode der Problemgenerierung aufmerksam: *Da die Methode, wie man Senkrechten zeichnet, schon gefunden ist, ist nichts einfacher, als sich ihrer zu bedienen, um die Figuren zu erstellen, die man Rechtecke oder Quadrate nennt.*

In Abschnitt 11 wird der Begriff "Parallele" eingeführt (Leitsatz 11): *Parallelen sind Linien, die überall gleichen Abstand voneinander haben. - Konstruktion einer Parallelen durch einen gegebenen Punkt.* Die in Abschnitt 10 beschriebene Konstruktion eines Rechtecks dient zur Lösung des Problems der Konstruktion einer Parallelen durch einen gegebenen Punkt.
Auch hier führt CLAIRAUT dem Leser die Bedeutung des Problems und seine Lösung durch Rückbesinnung auf ein bereits gelöstes Problem klar vor Augen: *Bei der Konstruktion von Bauten, wie etwa Wällen, Kanälen, Straßen usw., muß man parallele Linien haben, ... Um diese Linien zu bekommen, scheint nun nichts natürlicher, als sich auf die Methode zu beziehen, deren man sich bedient, um Rechtecke zu zeichnen.*

Mit Abschnitt 12 wird ein neuer Problemkreis angeschnitten:

---

[1] POLYA 1967 b, S. 154.

die Bestimmung des Oberflächenmaßes von Figuren. CLAIRAUT begründet die Beschäftigung mit diesem Problem ausführlich so: *Da die Regelmäßigkeit der rechteckigen Figuren dafür sorgt, daß sie oft benutzt werden, wie wir schon gesagt haben, kommen viele Fälle vor, wo man ihre Größe kennen muß. Es wird sich zum Beispiel darum handeln, zu entscheiden, wieviel Tapete man für ein Zimmer braucht, oder wieviel Morgen die Umfriedung eines Hauses, die die Form eines Rechtecks hat, enthalten muß, usw.* Die grundlegende Lösungsidee für dieses Problem wird explizit in Analogie zum Problem der Längenmessung gesetzt: *Man spürt, daß das einfachste und natürlichste Mittel, um zu dieser Art von Bestimmungen zu gelangen, ist, sich eines gemeinsamen Maßes zu bedienen, das die Oberfläche ganz bedeckt, wenn man es mehrere Male dort auflegt: eine Methode, die zurückgeht auf jene, deren man sich schon bedient hat, um die Längen von Linien zu messen.* Dieses Verfahren wird in Abschnitt 12 an einem Beispiel verdeutlicht, das zu Leitsatz 12 führt: *Das Maß eines Rechtecks ist das Produkt aus seiner Höhe und seiner Grundseite.*

Das umfassende Problem "Bestimmung des Oberflächenmaßes beliebiger Figuren" wird nun durch zusätzliche Bedingungen so lange spezialisiert, bis ein Problem entstanden ist, das man bereits gelöst hat. Zunächst wird das umfassende Problem eingeschränkt auf die geradlinig begrenzten Figuren (Abschnitt 13): *... wenn sich in der äußeren Form des Geländes irgendwelche gekrümmten Linien finden, ... können diese Linien, wenn man sie in so viele Teile einteilt wie nötig, um jeden Meßfehler zu vermeiden, den man noch bemerken könnte, als Vereinigung von geraden Linien aufgefaßt werden.* Und da sich jedes Polygon in Dreiecke zerlegen läßt, wäre das ursprüngliche umfassende Problem hinreichend genau gelöst, wenn man das Maß der Oberfläche von Dreiecken kennen würde. *Es wird sich also nur mehr darum handeln, das Maß der Dreiecke zu bekommen, die dabei* (bei der Triangulation) *entstehen. Nun weiß man aber, daß das sicherste Mittel, um etwas zu finden, was man nicht kennt, ist, da*

zu suchen, was man schon kennt, ob nichts darauf paßt, was man herausbekommen will; aber wir haben schon gesehen, daß jedes Rechteck ... gleich dem Produkt aus seiner Grundseite ... und seiner Höhe ... ist (Abschnitt 14). Leitsatz 14 läßt erkennen, daß daher das Problem für rechtwinklige Dreiecke gelöst ist: *Die Diagonale eines Rechtecks ist die Linie, die es in zwei gleiche Dreiecke teilt. - Die rechtwinkligen Dreiecke sind die, bei denen zwei Seiten aufeinander senkrecht stehen. - Ein Dreieck ist die Hälfte des Rechtecks, das dieselbe Grundseite und dieselbe Höhe hat; also ist sein Maß die Hälfte des Produkts aus seiner Höhe und aus seiner Grundseite.*

Da ein beliebiges Dreieck durch Einzeichnen einer Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, führt die Lösung des Spezialfalls "Oberflächenbestimmung rechtwinkliger Dreiecke" unmittelbar zur Lösung des Problems der Oberflächenbestimmung beliebiger Dreiecke. Damit ist bereits ein Lehrsatz bewiesen (Leitsatz 15): *Dreiecke, die die gleiche Grundseite und die gleiche Höhe haben, haben gleiche Flächen.*

Da bei der Herleitung dieses Satzes unter "Höhe" eine Linie verstanden wurde, die sich innerhalb des Dreiecks zeichnen läßt, wird in Abschnitt 16 die Gültigkeit der Aussage von Leitsatz 15 auch für solche Dreiecke gezeigt, bei denen die Höhe nicht auf die gegenüberliegende Grundseite auftrifft. Daraus ergibt sich dann der allgemeine Lehrsatz (Leitsatz 17): *Dreiecke, die dieselbe Grundseite haben und die zwischen denselben Parallelen eingeschlossen sind, haben die gleiche Oberfläche.*

Nachdem nun das Problem der Messung der Oberflächen von Polygonen prinzipiell gelöst ist, wird in den folgenden zwei Abschnitten 18 und 19 die allgemeine Lösung des Problems an einer weiteren wichtigen Figur - dem Parallelogramm - verdeutlicht und konkret wiederholt. Daß zwei Parallelogramme mit gleicher Höhe und gleicher Grundseite den gleichen Flächeninhalt haben, wird *selbst unabhängig von dem, was vorhergeht* (Abschnitt 19), bewiesen. Damit ist

die ursprüngliche Lösung des Problems "Messung der Oberfläche von Dreiecken" mittels eines davon unabhängigen Verfahrens verifiziert worden.

Bevor CLAIRAUT zur Landvermessung - dem ursprünglichen Problem - zurückkehrt, beschäftigt er sich in den Abschnitten 20 bis 24 mit einigen regelmäßigen Figuren. Leitsatz 20: *Regelmäßige Polygone sind Figuren, die von gleichen Seiten begrenzt sind, und die gegen ihre Nachbarseiten alle gleich geneigt sind.* Getreu dem im Vorwort angeführten Vorsatz, *die Anfänger zu interessieren und zu belehren,* wird die Beschäftigung mit regelmäßigen Polygonen auch begründet: *In Anbetracht, daß man die symmetrische Form dieser Figuren Becken, Brunnen, öffentlichen Plätzen usw. zu geben pflegt, glaube ich, daß es nötig ist, bevor man lernt, sie zu messen, zu sehen, auf welche Art man sie zeichnen kann.*
Die in Abschnitt 21 vorgeschlagene *Methode, wie man ein Polygon mit einer bestimmten Anzahl von Seiten zeichnet* (Leitsatz 21, 1. Teil), erscheint allerdings unbefriedigend: *Man zeichnet einen Kreisumfang; man teilt ihn in so viele gleiche Teile, wie das Polygon Seiten haben soll; sodann zieht man die Linien AB, BD, DE usw. durch die Punkte A, B, D, E usw., die den Kreisumfang teilen, und hat dann das gesuchte Polygon ...* Aus mathematischer Sicht ist diese Methode unbefriedigend, weil, wie CLAIRAUT in Abschnitt 24 selbst schreibt, die Polygone außer denen mit 3, 6, 12 usw. sowie 4, 8, 16 usw. Seiten *ohne Zuhilfenahme der Algebra ... nicht geometrisch konstruiert werden können.*
Um das Maß eines regelmäßigen Polygons zu bekommen, könnte man die Methode benutzen, die wir schon für die geradlinigen Figuren angegeben haben (Abschnitt 13); *aber man wird sofort gewahr, daß der kürzeste Weg ist, das Polygon in gleiche Dreiecke aufzuteilen, die alle den Mittelpunkt als Spitze haben* (Abschnitt 22). Mit diesen Worten legt CLAIRAUT dem Leser nahe, einmal gefundene Regeln und Lösungen nicht schematisch auf jedes damit lösbare Problem anzuwen-

den, sondern immer zu prüfen, ob die Anwendung einer Methode dem Problem auch angepaßt ist, ob es nicht einfachere Lösungsmethoden gibt.

Mit der Rückkehr zur Landvermessung in Abschnitt 25 wirft CLAIRAUT einen völlig neuen Problemkreis auf, dessen Behandlung die Abschnitte 25 bis 49 ausfüllt: das Zeichnen kongruenter bzw. ähnlicher Dreiecke. Auch dieser Problemkreis wird nicht einfach genannt und behandelt, sondern in Abschnitt 25 ausführlich motiviert: *Ich kehre zur Landvermessung zurück, und ich sehe, daß das Gelände, das man messen will, oft dergestalt ist, daß es die Operationen nicht zuläßt, die die vorhergehenden Methoden vorschreiben.*

Ich mache die Annahme, daß ABCDE (Fig. 24[1]) die Figur eines Feldes, einer Einfriedung usw. sei, deren Maß man haben möchte. Demzufolge, was wir gesehen haben, müßte man ABCDE

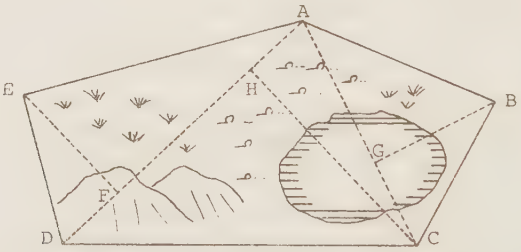


Fig. 24

in Dreiecke wie ABC, ACD und ADE teilen; danach diese Dreiecke messen, nachdem man die Lote EF, CH und BG gefällt hat; aber wenn sich auf der Fläche ABCDE irgendwelche Hindernisse befinden, eine Erhebung zum Beispiel, ein Wald, ein Teich usw., die verhindern, daß man die Linie zieht, die man braucht, was soll man dann tun? Welcher Methode müßte man folgen, um der Unannehmlichkeit des Geländes abzuhelfen? Was sich dem Geist zuerst anbietet, ist, irgendein flaches Gelände zu wählen, auf dem man leicht

---

[1] Die Figuren und ihre Numerierung sind den "Eléments de géométrie" entnommen.

operieren kann, und auf diesem Gelände gleiche Dreiecke zu zeichnen, ähnlich den Dreiecken ABC, ACD usw. Wir wollen sehen, wie man die Sache anfängt, um die neuen Dreiecke zu bilden.

Fangen wir an, indem wir voraussetzen, daß das Hindernis sich im Innern des Dreiecks ... befindet, dessen Seiten bekannt seien ... (Abschnitt 26). Diese Problemstellung wird in Abschnitt 26 dazu benutzt, die Konstruktion eines kongruenten Dreiecks zu erarbeiten, wenn die Seiten des ursprünglichen Dreiecks gegeben sind. Die Kongruenz der so konstruierten Dreiecke wird als offensichtlich angesehen.

Da in allen weiteren Kongruenzsätzen Winkel auftreten, wird in Abschnitt 27 der Begriff "Winkel" definiert. Leitsatz 27: *Ein Winkel ist die Neigung einer Linie gegenüber einer anderen.* Intuitiv eingeführt wird der Begriff "Winkel" in Abschnitt 27 so: *Wenn man nur zwei der drei Seiten des Dreiecks ABC messen könnte, ... so ist klar, daß man damit allein nicht ein zweites Dreieck bestimmen könnte, das gleich groß und ähnlich ABC ist.* (Das Wort "ähnlich" wird in diesen Abschnitten rein umgangssprachlich, mathematisch undefiniert, benutzt.) Denn man wüßte nicht, *welche Lage man der einen Seite bezüglich der anderen geben sollte.* Um diese Schwierigkeiten zu beheben, wird in Abschnitt 28 gezeigt, wie man mit Hilfe eines Instrumentes aus zwei um einen gemeinsamen Drehpunkt beweglichen Linealen Winkel übertragen kann. Damit ergibt sich ein weiterer Kongruenzsatz (Leitsatz 28): *Methode, wie man einen Winkel, der dieselbe Größe hat wie ein anderer, zeichnet. - Das Dreieck ist bestimmt, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.*
Leitsatz 29: *Zweite Methode, einen Winkel zu zeichnen, der dieselbe Größe hat wie ein anderer. - Die Sehne eines Kreisbogens ist die gerade Linie, die von den zwei Enden des Bogens begrenzt wird.* Wie aus dem Leitsatz bereits zu erkennen ist, gründet die zweite Methode der Winkelübertragung auf der Messung der Länge der Sehne des zum Winkel gehörenden Kreisbogens, anders ausgedrückt, auf dem Bogen-

maß.

Die Problemstellung, eventuell nur eine Seite messen zu können, führt in Abschnitt 30 zum Kongruenzsatz (Leitsatz 30): *Zwei Winkel und eine Seite bestimmen ein Dreieck.* Und nachdem ein zweites Dreieck mittels dieses Kongruenzsatzes konstruiert worden ist, heißt es weiter: *Das Prinzip, das bei dieser Operation vorausgesetzt wird, ist als solches so einfach, daß es nicht bewiesen werden muß.* Abschnitt 31 schließt die Untersuchung der Kongruenz von Dreiecken ab, indem für das spezielle gleichschenklige Dreieck gezeigt wird, daß die Kenntnis von Grundseite und einem Basiswinkel genügen, um ein dazu kongruentes Dreieck konstruieren zu können.

Auf den vierten Kongruenzsatz geht CLAIRAUT ohne Angabe von Gründen nicht ein, sondern kehrt in Abschnitt 32 wieder zur Landvermessung zurück. Ein Grund für die Nichtbehandlung des vierten Kongruenzsatzes könnte sein, daß, ausgehend von der Landvermessung, eine konkrete Problemstellung für die Erarbeitung dieses Satzes nicht gegeben ist, denn wenn sich im Gelände die Längen zweier Linien messen lassen, so läßt sich auch immer der von ihnen eingeschlossene Winkel messen, so daß der Kongruenzsatz von Abschnitt 28 vollauf genügt. Dies drückt CLAIRAUT in Abschnitt 32 so aus: *Um auf die Landvermessung zurückzukommen, sieht man, daß man, wie auch immer die Hindernisse im Innern sein mögen, mittels der vorhergehenden Methode leicht alle Dreiecke, die die Fläche, die man messen will, aufteilen, auf ein freies Gelände übertragen kann.* Zur Nichtbehandlung des vierten Kongruenzsatzes hat CLAIRAUT in allgemeiner Weise auch schon im Vorwort Stellung genommen.

Probleme, die beim Konstruieren kongruenter Dreiecke im Gelände auftreten können, dienen CLAIRAUT in Abschnitt 33 dazu, den Problemkreis "Ähnlichkeit" zu eröffnen: *Die Methode, die wir gerade zur Messung des Geländes angegeben haben, in dem man keine Linien ziehen kann, bringt oft große Schwierigkeiten in der Praxis hervor. Man findet sel-*

ten eine glatte und freie Fläche, groß genug, um Dreiecke herzustellen, die gleich denen in dem Gelände sind, in dem man messen will. Und selbst wenn man eine fände, könnte die große Länge der Seiten der Dreiecke die Operationen sehr schwierig gestalten: Das Lot zu fällen von einem Punkt aus auf eine Linie, die wenigstens 500 Klafter entfernt ist, wäre eine extrem mühselige Arbeit, und vielleicht unausführbar. Es ist daher wichtig, ein Mittel zu haben, das diese großen Operationen ersetzt.
Dieses Mittel bietet sich von selbst an. Es kommt bald in den Sinn, die zu messende Figur ... durch eine ähnliche ... darzustellen ..., nur kleiner ... Aber, vor allem anderen, müssen wir wissen, worin die Ähnlichkeit zweier Figuren besteht. Der Begriff "ähnlich" wird hier also zunächst umgangssprachlich benutzt, um ihn nun, im Sinne einer genetischen Darstellung, mathematisch zu präzisieren.
Wenn man auch nur ein bißchen darüber nachdenkt, erkennt man bald, daß die zwei Figuren ..., um ähnlich zu sein, derartig sein müssen, daß die Winkel ... in der großen Figur gleich den Winkeln in der kleinen Figur ... sein müssen, und daß darüber hinaus die Seiten ... der kleinen Figur ebenso viele Teilstrecken p enthalten wie die (entsprechenden) *Seiten ... große Teilstrecken P* (Abschnitt 34). Anders ausgedrückt (Abschnitt 35), die Seiten müssen zueinander proportional sein bzw. im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Diese Definition wird in Abschnitt 36 konkret angewendet, um eine verkleinerte ähnliche Abbildung eines Fünfecks zu zeichnen.

Die Rückschau auf die soeben ausgeführte Konstruktion macht nun deutlich, daß nicht die Gleichheit aller fünf Winkelpaare und nicht die Proportionalität aller fünf Paare von Seiten benutzt worden sind, um die verkleinerte Figur zu zeichnen, sondern daß nur vier Winkel und drei Seiten der großen Figur benutzt worden sind. *Eine Rückschau, die zunächst befürchten lassen könnte, daß der Winkel d nicht tatsächlich gleich dem Winkel D sei, noch die Seiten ed und cd*

proportional zu den Seiten ED und CD, und daß folgerichtig die Figur abcde nicht genau dieselbe Form hätte wie die Figur ABCDE ... Um jedoch jeden Verdacht zu zerstreuen, wollen wir zeigen, daß alle Bedingungen, die bei der Ähnlichkeit zweier Figuren gefordert werden, notwendigerweise voneinander abhängig sind; das wird uns leichtfallen, indem wir zuerst die Dreiecke untersuchen, welche die einfachsten Figuren sind, und die notwendigerweise bei der Zusammenfügung aller anderen eingehen; eine Untersuchung, die uns auf alle Eigenschaften und alle Anwendungen der ähnlichen Figuren führen wird (Abschnitt 37). Anhand von konkreten Beispielen wird dann plausibel gemacht: *Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so stimmen auch die dritten Winkel untereinander überein* (Leitsatz 38), und: *Zwei Dreiecke, die jeweils gleiche Winkel haben, haben proportionale Seiten* (Leitsatz 39).
Aus dem Lehrsatz, den wir soeben bewiesen haben, läßt sich in natürlicher Weise die Lösung eines Problems ableiten, die oft nutzbringend in der Praxis ist.
Man möchte eine Linie in eine gegebene Anzahl gleicher Teile aufteilen; das könnte man zwar durch Ausprobieren machen; aber niemals mit jener Sicherheit, die die geometrische Exaktheit liefert (Abschnitt 40).

In Abschnitt 41 wird erläutert, *was es heißt, daß eine Linie vierte Proportionale zu drei anderen ist, und wie man sie findet* (Leitsatz 41).
Um in Abschnitt 43 die Oberflächen ähnlicher Dreiecke miteinander vergleichen zu können, wird in Abschnitt 42 gezeigt, daß die Höhen ähnlicher Dreiecke zu ihren Seiten proportional sind. Denn wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, so gilt, daß die Grundseite des einen ebensooft das Maß P enthält wie die Grundseite des anderen das Maß p, und da diese Aussage aufgrund des in Abschnitt 42 Gesagten auch für die Höhen gilt, enthält das eine Dreieck also ebenso viele Quadrate mit der Grundseite P wie das andere Quadrate mit der Grundseite p. Das wird in Abschnitt 44 noch anders dargestellt: *Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhal-*

ten sich wie die Quadrate ihrer entsprechenden Seiten.

Abschnitt 45 untersucht die *Eigenschaften ähnlicher Figuren, abgeleitet aus den Eigenschaften der Dreiecke* (Leitsatz 45), indem mehrere Dreiecke sowie die dazu ähnlichen in gleicher Reihenfolge zu zwei Polygonen zusammengesetzt werden. Dabei ergibt sich, daß in den beiden Polygonen entsprechende Winkel gleich sind und entsprechende Strecken im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

In Abschnitt 46 greift CLAIRAUT noch einmal das Problem von Abschnitt 37 auf, ob es genügt, bei der Konstruktion eines ähnlichen Fünfecks nur drei Seiten und die anliegenden vier Winkel zu messen. Er hält es für *offensichtlich*, daß die neue Figur ähnlich der ursprünglichen ist und fährt fort: *Das ist ein vollständiger Beweis dessen, was wir nur vermutet haben (Abschnitt 37)*. Da CLAIRAUT aber mit keinem Wort auf die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts eingeht, ist unklar, wieso die ehemalige "Offensichtlichkeit" jetzt bewiesen ist.
Mit Hilfe ähnlicher Schlußfolgerungen wie in Abschnitt 43 wird in Abschnitt 47 gezeigt, daß sich die Oberflächen ähnlicher Figuren verhalten wie die Quadrate entsprechender Seiten.
Als abschließende und zusammenfassende Bemerkung über die Ähnlichkeit dient Abschnitt 48: *Alles, was gerade über ähnliche Figuren gesagt worden ist, läßt sich auf das alleinige Prinzip zurückführen, daß sich ähnliche Figuren nur durch den Maßstab unterscheiden, in dem sie konstruiert sind.*
Danach kehrt CLAIRAUT - immer unter dem Aspekt, dem Anfänger zu zeigen, daß die Untersuchung der Ähnlichkeit von einem konkreten Problem ausging - in Abschnitt 49 zur Landvermessung zurück und verdeutlicht an einem Beispiel, wie die Größe eines Geländes relativ bequem gemessen werden kann, ohne es zu betreten und ohne ein dazu kongruentes auf einem freien Gelände zu konstruieren und dieses auszumessen.

Als Abschluß des Problemkreises "Ähnlichkeit" und gleichzeitig als implizite Motivation zur Betrachtung des anschließenden Problemkreises "Winkelmessung" gibt CLAIRAUT in Abschnitt 50 ein neues Problem an - das Problem, die Entfernung eines unzugänglichen Punktes zu messen -, das mittels der Ähnlichkeitsbetrachtungen der vorhergehenden Abschnitte bereits gelöst ist.
Die Übertragung von Winkeln, die bei der Konstruktion ähnlicher Dreiecke in den meisten Fällen unumgänglich ist, und die damit verbundenen Schwierigkeiten dienen CLAIRAUT nun als Motivation, sich genauer mit der Winkelmessung zu beschäftigen: *Der Gebrauch, den man von verschiedenen Instrumenten wie etwa ... machen kann, von dem ich sagte (Abschnitt 28), daß es aus zwei Armen bestünde, die im Punkt A zusammengesetzt sind, um den sie sich drehen können, ist oft vielen Meßfehlern ausgesetzt. Einmal wird sich die Öffnung des Winkels beim Transport ändern; einmal wird die Form, die man dem Instrument geben muß, um seinen Gebrauch zu erleichtern, verhindern, daß man es auf der Fläche anwendet, auf dem die Verkleinerung ausgeführt werden muß. Fügen wir hinzu, daß jeder neue Winkel ..., den man auf diese Art nimmt, verlangt, daß man das Instrument von neuem auf das Papier bringt, und daß das einzige Mittel, das man hat, um zwei Winkel zu vergleichen, ist, einen auf den anderen zu legen, ohne daß man dadurch die Möglichkeit hätte, ganz genau ihr Verhältnis oder ihre absolute Größe zu messen* (Abschnitt 51).
Es war also notwendig, ein festes Maß für Winkel zu suchen, wie man es schon für Längen hatte. Nun war es aber leicht, dieses Maß, das man haben mußte, zu finden (Abschnitt 52).
Worin dieses Maß besteht, drückt Leitsatz 52 aus: *Ein Winkel hat als Maß den Kreisbogen, den seine Schenkel ausschneiden.*

Die folgenden Abschnitte dienen nun dazu, einige Begriffe zu definieren sowie einfache Beziehungen zwischen Winkeln darzustellen. Die Einteilung des Kreises ist das Thema von

Abschnitt 53 (Leitsatz): *Der Kreis wird in 360 Grad eingeteilt, jeder Grad in 60 Minuten usw.* Leitsatz 54 definiert den rechten Winkel und liefert gleichzeitig eine Beziehung zum Begriff "Senkrecht": *Der rechte Winkel hat 90 Grad, und seine Schenkel stehen senkrecht aufeinander.* Die Abschnitte 55 und 56 definieren die Begriffe "Spitzer Winkel" und "Stumpfer Winkel": *Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein rechter Winkel* (Leitsatz 55), und *ein stumpfer Winkel ist größer als ein rechter Winkel* (Leitsatz 56). Die Aussage von Abschnitt 57 ist, daß ein gestreckter Winkel 180 Grad hat, und Leitsatz 58 bringt den Vollwinkel und den rechten Winkel in Zusammenhang: *Alle Winkel, die man um einen Punkt herum zeichnen kann, sind zusammengenommen gleich vier Rechten.*

Nachdem man herausgefunden hat, daß die Winkel die Teile des Kreises als Maß haben, wollen wir sehen, wie man es anfängt, um zu bestimmen, wieviele Grade ein Winkel enthält, den man messen will (Abschnitt 59). Dazu wird in Abschnitt 59 der "Gradbogen" eingeführt, ein Instrument, das aus zwei gegeneinander drehbaren Linealen besteht, von denen das eine Durchmesser eines Halbkreises ist, der in 180 Grad unterteilt ist. Diese Lineale sind *an ihren Enden mit Visiereinrichtungen versehen.* Dieses Instrument dient dazu, Winkel im Gelände zu messen. In Abschnitt 60 wird der auch heute noch gebräuchliche "Winkelmesser" eingeführt, der aus einem Halbkreis besteht. Abschnitt 61 schildert eine konkrete Anwendung dieser beiden Instrumente.

Mit der folgenden Bemerkung wird nun die Untersuchung der Winkelsumme im Dreieck motiviert (Abschnitt 62): *Da es in der Praxis wichtig ist, wie wir bereits gesagt haben, daß die Winkel exakt gemessen werden müssen, darf man sich nicht damit zufriedengeben, sie selbst mit den perfektesten Instrumenten abzulesen, sondern man muß noch ein Hilfsmittel finden, ihr Maß zu überprüfen, um damit eine Berichtigung vorzunehmen, wenn es nötig ist. Nun ist dieses Hilfsmittel einfach und leicht. Nehmen wir noch einmal das Dreieck ABC.*

Man spürt, daß die Größe des Winkels C aus jener der Winkel A und B resultieren muß ... Die anschließende Untersuchung, bei der der Winkel A festgehalten und B vergrößert wird, veranlaßt CLAIRAUT zur Feststellung: *Das läßt zunächst vermuten, daß in diesem Fall die Verminderung des Winkels C gleich der Vergrößerung des Winkels B ist und daß also die Summe der drei Winkel A, B und C immer dieselbe ist ...* (Abschnitt 62, Unterstreichung von mir).

Die in diesem Abschnitt gezogenen Schlüsse scheinen mir voreilig und zu sehr von Wunschdenken geprägt zu sein. Die erwähnte Untersuchung, bei der der Winkel A festgehalten und B vergrößert wird, könnte allenfalls zu der qualitativen Vermutung führen, daß eine Vergrößerung von B eine Verkleinerung von C nach sich zieht und umgekehrt (bei konstantem Winkel A). Diese voreilige Schlußweise scheint mir ein Rückfall CLAIRAUTs in die "Vorführmathematik" zu sein, die er in diesem Buch eigentlich rigoros vermeiden wollte. Dieser Rückfall wäre leicht zu vermeiden gewesen, wenn er die Konstantheit der Winkelsumme im Dreieck nicht als offensichtliche Vermutung (die aufgrund der Untersuchungen in Abschnitt 62 wirklich nicht sofort zu finden ist), sondern als ein - für die Überprüfung der Winkelmessung - erhoffenswertes Ziel motivierend dargestellt hätte.
Um in Abschnitt 64 zeigen zu können, daß die Winkelsumme im Dreieck immer gleich 180 Grad ist, werden im vorhergehenden Abschnitt 63 Wechselwinkel definiert und untersucht, wobei es "offensichtlich" ist, daß Wechselwinkel gleich groß sind.
Das in Abschnitt 62 gesuchte Hilfsmittel zur Überprüfung der Winkelmessung ist also gefunden und wird in Abschnitt 65 noch einmal abschließend dargelegt.

Die beiden folgenden Abschnitte 66 und 67 machen Aussagen über das Auftreten von rechten bzw. stumpfen Winkeln: *Ein Dreieck kann nicht mehr als einen rechten Winkel haben; noch weniger kann es mehr als einen stumpfen Winkel haben.* Und Abschnitt 67 besagt, daß in rechtwinkligen Dreiecken

die Summe der anderen beiden Winkel gleich 90 Grad ist. In Abschnitt 68 wird eine weitere Folgerung aus dem Wechselwinkelsatz von Abschnitt 63 gezogen (Leitsatz): *Der äußere Winkel eines Dreiecks ist genauso groß wie die beiden inneren gegenüberliegenden zusammen.*

Die beiden Abschnitte 69 und 70 befassen sich mit speziellen Dreiecken; für das gleichschenklige Dreieck gilt Leitsatz 69: *Ein Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks bestimmt die beiden anderen.* Und für gleichseitige Dreiecke gilt Leitsatz 70: *Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind alle 60 Grad groß.*

Die letzten fünf Abschnitte des ersten Teils des Buchs "Eléments de géométrie" beschäftigen sich fast ausschließlich damit, wie regelmäßige Polygone mit 6, 12, 24 usw. Seiten bzw. mit 8, 16, 32 usw. Seiten gezeichnet werden können. Die hierzu nötige Teilung eines Winkels in zwei gleiche Teilwinkel ist Gegenstand von Abschnitt 63.

1.2.2.3 *Zweiter Teil. Über die geometrische Methode, gradlinige Figuren zu vergleichen*

Die Motivation für die Beschäftigung mit der Mathematik war im ersten Teil des Buchs ausschließlich durch die Anwendungen der untersuchten Mathematik in der konkreten Landvermessung gegeben. Das zeigte sich unter anderem daran, daß - wie schon weiter oben erwähnt - bei der Untersuchung der Kongruenzsätze die konkrete Notwendigkeit der Untersuchung für die Landvermessung Vorrang hatte vor ihrer Vollständigkeit, so daß der letzte Kongruenzsatz - zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen - bei der Untersuchung nicht aufgeführt wurde.

Mit Beginn des zweiten Teils läßt sich CLAIRAUT nun schrittweise von innermathematischen Motiven leiten. Das geht klar aus der Vorbemerkung zum zweiten Teil hervor: *Im Hinblick auf das bei der Landvermessung Gesagte ist festzustellen,*

daß die gegenseitige Lage der Geraden aus sich selbst heraus beachtenswerte Beziehungen liefert, unabhängig von der Nützlichkeit, die sie in der Praxis haben könnte; und es ist zu vermuten, daß diese Beziehungen die ersten Geometer bewegt haben, ihre Entdeckungen weiterzutreiben, denn es sind nicht nur die Bedürfnisse, die die Menschen bestimmen, die Neugierde ist oft ein ebenso großes Motiv für ihre Untersuchungen.
Was fernerhin zum Fortschritt der Geometrie beitragen mußte, ist die Vorliebe, die man von Natur aus für jene unerbittliche Präzision hat, ohne die der Geist niemals zufrieden ist.

Diese Worte dienen als Begründung dafür, daß im zweiten Teil die geometrische Methode, gradlinige Figuren zu vergleichen, untersucht wird, so daß nicht für jedes geometrische Problem ein entsprechendes in der Landvermessung gesucht wird. Die ersten sechs Abschnitte befassen sich mit dem Größenvergleich von Rechtecken und den dazu nötigen Konstruktionen. Den Größenvergleich in einem Spezialfall drückt Leitsatz 1 aus: *Zwei Rechtecke, die dieselbe Höhe haben, stehen im selben Verhältnis wie ihre Grundseiten.* Damit bietet sich eine Lösung des allgemeinen Problems "Größenvergleich von Rechtecken" an: *... wenn zwei Rechtecke in zwei andere derselben Höhe übergeführt werden, so werden sie sich nur mehr durch ihre Grundseiten unterscheiden.* Damit ist das allgemeine Problem verlagert auf das Problem, *wie man ein Rechteck in ein anderes mit vorgegebener Höhe überführt* (Leitsatz 5), das auf zweifache Weise in den Abschnitten 5 und 6 gelöst wird.

Die Abschnitte 2 und 3 bestehen jeweils nur aus einem Satz: *Um diese zwei Rechtecke* (mit gleicher Höhe) *aneinanderzufügen, muß man sie nur Seite an Seite aneinanderlegen*, sowie: *Es wird nicht schwieriger sein, das kleinere vom größeren abzutrennen.* Und Abschnitt 4 löst das Problem, *ein Rechteck in eine vorgegebene Anzahl von gleichen Rechtecken aufzuteilen*, indem die Grundseite in diese Anzahl gleicher Teile aufgeteilt wird (und dieses Problem war bereits in

Abschnitt 40, Teil 1, gelöst worden).

Um nun eine *Methode, wie man ein Rechteck in ein anderes mit vorgegebener Höhe überführt* (Leitsatz 5), zu finden, wird das Problem in Abschnitt 5 anhand eines allgemeinen Beispiels auf das Auffinden der Vierten Proportionalen zu den drei gegebenen Stücken Höhe und Grundseite des ursprünglichen und Höhe des neuen Dreiecks reduziert - und dieses Problem wurde bereits in Abschnitt 41, Teil 1, gelöst. Die *zweite Methode, ein Rechteck in ein anderes überzuführen, dessen Höhe gegeben ist* (Leitsatz 6), ist *weniger natürlich ... als die vorhergehende, dafür aber bequemer.* CLAIRAUT gibt diese Methode einfach an, ohne sie heuristisch herzuleiten. Sie beruht darauf, daß im Rechteck ABFI (vgl. Fig. 59), das als Grundseite die Grundseite AB des ursprünglichen Rechtecks und als Höhe die Höhe BF des gesuchten Rechtecks hat, die Diagonale IB das Rechteck ABFI in zwei flächengleiche und kongruente Dreiecke zerlegt, so daß letzten Endes auch die Rechtecke ABCD und BFEG gleiche Größe haben.

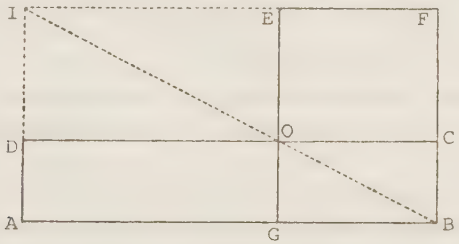


Fig. 59

Diese zweite Methode dient in Abschnitt 7 als Grundlage für *den strengen Beweis, daß, wenn zwei Rechtecke gleich groß sind, die Grundseite des ersten sich zur Grundseite des zweiten verhält wie die Höhe des zweiten zur Höhe des ersten* (Leitsatz 7), d.h. zum Beweis des Prinzips, auf das sich die erste Methode gründete. Denn (vgl. Fig. 59) *da die Dreiecke IAB und OGB offensichtlich ähnlich sind, verhält sich die Grundseite AB des großen zur Grundseite GB des*

kleinen wie die Höhe IA zur Höhe OG, oder wie BF zu BC, die gleich den erstgenannten Höhen sind. Also verhält sich AB zu GB wie BF zu BC, in Übereinstimmung mit Abschnitt V.

Die Umkehrung des Prinzips der ersten Methode behandelt Abschnitt 8 (Leitsatz): *Wenn sich vier Linien so verhalten, daß die erste sich zur zweiten wie die dritte zur vierten verhält, so sind die Rechtecke, die aus der ersten und der vierten und aus der zweiten und der dritten gebildet werden, gleich groß.* In diesem Satz wird die Proportion bereits benutzt, ohne allerdings diesen Begriff zu nennen oder zu definieren. Er wird daher in Abschnitt 9 definiert (Leitsatz): *Man sagt von vier Größen, deren erste sich zur zweiten verhält wie die dritte zur vierten, daß sie eine "Proportion" bilden.*
Die folgenden Abschnitte dienen nun der Untersuchung der Proportion. An dieser Stelle wird deutlich, daß die außermathematische Motivation des ersten Teils - die Landvermessung - ersetzt wird durch eine innermathematische Motivation - den Größenvergleich von Rechtecken.

Abschnitt 10 definiert die Begriffe "Äußere Glieder" und "Innere Glieder" einer Proportion.

Die Abschnitte 11 und 12 nennen - ohne Beweis - einfache Eigenschaften einer Proportion: *Stehen vier Größen in Proportion, so ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder* (Abschnitt 11), und: *Sind vier Größen derart gegeben, daß das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren Glieder ist, so stehen diese vier Größen in Proportion* (Abschnitt 12).

Obwohl die Untersuchung der Proportion nur innermathematisch motiviert war, führt sie doch zu einer wichtigen außermathematischen Anwendung: *Es ist der passende Augenblick, zwei vorhergehenden Abschnitten große Beachtung zu schenken; sie sind von großem Nutzen: Unter anderem leitet man aus ihnen den Beweis der Regel ab, die man in der Arithmetik "Regeldetri" nennt. Um eine Vorstellung dieser Regel*

zu geben, nehmen wir ein Beispiel; das ist die einfachste Art, wie man sich verständlich macht (Abschnitt 13). Die Dreisatzrechnung wird dann an einem einfachen Beispiel verdeutlicht.

Ein Beispiel, das so einfach ist wie dasjenige, das wir gerade gewählt haben, läßt vielleicht nicht genug die Notwendigkeit der vorhergehenden Methode spüren. Der gesunde Menschenverstand allein läßt einen die gesuchte Zahl finden (Abschnitt 14). Also wird in diesem Abschnitt ein Beispiel mit komplizierteren Zahlen gegeben, das nicht mehr so einfach zu überblicken ist. *Wenn man versuchen würde, diesen Term auf andere Weise zu finden, so könnte man das nur durch Herumprobieren. ... Aber die Allgemeinheit und die Sicherheit der vorhergehenden Methode bewahrt uns immer vor dem lästigen Herumprobieren, das sogar in vielen Fällen unnütz wird.*

Mit Abschnitt 15 beginnt ein neuer Problemkreis, der zum Satz des PYTHAGORAS führt: ausgehend von zwei ähnlichen Figuren eine dritte dazu ähnliche zu konstruieren, deren Fläche gleich der Gesamtfläche der ersten beiden Figuren ist. Das Problem von Abschnitt 15 ist zunächst noch ein anderes: wie man zwei Quadrate in ein flächengleiches Rechteck verwandelt. Da Quadrate Rechtecke sind, ist dieses Problem bereits in den Abschnitten 2, 5 und 6 gelöst worden.

Der oben genannte neue Problemkreis wird in Abschnitt 16 mit einem speziellen Problem eröffnet (Leitsatz 16): *Wie man ein Quadrat herstellt, das doppelt so groß ist wie ein anderes.* Die Lösung ist einfach, wenn die zwei ursprünglichen Quadrate durch Diagonalen geteilt und die so entstandenen Dreiecke zu einem neuen Quadrat angeordnet werden. Der folgende Abschnitt 17 (*Wie man ein Quadrat herstellt, das gleich zwei anderen zusammen ist*) verfolgt wieder die auch in Teil 1 dieses Buchs bereits angewendete Lösungsstrategie, die Idee der Lösung eines speziellen Teilproblems auf die Lösung des allgemeinen Problems zu

übertragen: *Nehmen wir nun an, daß man ein Quadrat herstellen wollte, das gleich groß ist wie die beiden ungleichen Quadrate ADCd und CFEf (Fig. 61) zusammen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß man sich vornimmt, die Figur ADFEfd in ein Quadrat überzuführen.*

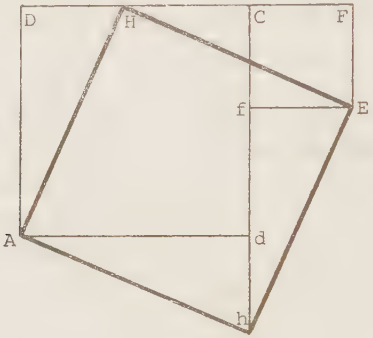


Fig. 61

Folgt man dem Geist der vorhergehenden Methode, so wird man versuchen, ob es nicht irgendwie möglich ist, auf der Linie DF irgendeinen Punkt H zu finden, derart, daß

1. *wenn man die Linien AH und HE zieht und die Dreiecke ADH und EFH sich um die Punkte A und E drehen läßt, bis sie die Positionen Adh und Efh haben, diese beiden Dreiecke sich in h wieder treffen;*
2. *die vier Seiten AH, HE, Eh und hA gleich lang seien und senkrecht aufeinander stehen.*

Nun findet man diesen Punkt H ... leicht, wie man in Figur 61 erkennt.

Damit ist es CLAIRAUT gelungen, mit Hilfe eines innermathematischen Problems - der Verwandlung zweier verschiedener Quadrate in ein einziges flächengleiches - den Satz des PYTHAGORAS in seiner bekannten Form motiviert herzuleiten und gleichzeitig zu beweisen. Die Formulierung des Satzes ist Gegenstand von Abschnitt 18 (Leitsatz): *Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist seine große Seite, und*

das Quadrat dieser Seite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten.

Diese unter heuristischem Aspekt überaus schöne Herleitung des Satzes von PYTHAGORAS scheint es mir wert zu sein, ihre einzelnen Schritte noch einmal genau nachzuvollziehen.
Nach Leitsatz 1 (*Zwei Rechtecke, die dieselbe Höhe haben, stehen im selben Verhältnis wie ihre Grundseiten*) folgt in Abschnitt 2 die selbstverständliche Bemerkung: *Um diese zwei Rechtecke aneinanderzufügen, muß man sie nur Seite an Seite aneinanderlegen.* Um das Problem zu lösen, das aus diesem durch Verallgemeinerung hervorgeht, nämlich zwei Rechtecke mit unterschiedlichen Höhen in ein einziges überzuführen, braucht man zunächst eine *Methode, wie man ein Rechteck in ein anderes mit vorgegebener Höhe überführt,* die in Abschnitt 5 beschrieben wird. Damit ist das verallgemeinerte Problem prinzipiell gelöst und auf den Satz aus Abschnitt 2 zurückgeführt. Ebenso ist das Problem bereits gelöst, wenn zwei Quadrate in ein Rechteck übergeführt werden sollen, *da ja Quadrate Rechtecke sind, deren Höhe und Grundseite gleich sind* (Abschnitt 15). Durch eine Spezialisierung der Bedingungen der Aufgabe entsteht nun ein neuer Problemkreis, mit dem unmittelbar die Entdeckung des Satzes von PYTHAGORAS vorbereitet wird: Die Figur, die bei der Zusammenfügung zweier Quadrate entsteht, soll selbst wieder ein Quadrat sein. Da dieses Problem nicht unmittelbar gelöst werden kann, wird zunächst durch Spezialisierung der gegebenen Objekte das Problem gelöst, *wie man ein Quadrat herstellt, das doppelt so groß ist wie ein anderes* (Leitsatz 16).
Dieses spezielle Problem legt es nun nahe, das allgemeine Problem zu untersuchen, bei dem die beiden Quadrate nicht notwendig gleich groß sind. Und die Lösung des speziellen Problems wird nun analog übertragen auf das allgemeine Problem, indem man *dem Geist der vorhergehenden Methode* folgt, wie es CLAIRAUT ausdrückt.
Der Satz des PYTHAGORAS in der expliziten Formulierung von Abschnitt 18 führt nun wiederum in Abschnitt 19 zu einer

Vereinfachung der Lösung, deren Ergebnis er war: *Will man also aus zwei Quadraten ... ein einziges machen, so ist es überflüssig, sie Seite an Seite aneinanderzulegen und sie zu zerlegen ... Es genügt, ihre Seiten ... so zu legen ..., daß sie einen rechten Winkel bilden ...* Die Rückschau auf das gelöste Problem führt hier also dazu, die gefundene Lösung zu vereinfachen und zu straffen und damit zu verbessern.

Abschnitt 20 liefert eine Verallgemeinerung des Satzes von PYTHAGORAS (Leitsatz 20): *Wenn die zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als Grundseiten für drei Figuren dienen, die einander ähnlich sind, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der Figuren über den beiden anderen Seiten.* Der Beweis dieses Satzes bedarf nur des Rückgriffs auf Abschnitt 47 von Teil 1, der besagte, daß ähnliche Figuren sich verhalten wie die Quadrate ihrer entsprechenden Seiten. Abschnitt 21 formuliert dann noch einmal explizit, analog dem Abschnitt 19, *wie man mehrere ähnliche Figuren in eine einzige überführt* (Leitsatz 21).
Abschnitt 22 dient wieder dazu, analog einigen Abschnitten des ersten Teils, neue Probleme zu nennen, die mittels der gerade gelösten ebenfalls gelöst werden können: *Wenn man sich vornähme, ein Quadrat fünf-, sechsmal usw. größer zu machen als ein anderes ...* sowie *selbst für die Umkehrung des Problems; das heißt, um ein Quadrat herzustellen, das nur ein Fünftel, ein Sechstel usw. der Fläche eines vorgegebenen Quadrats hat; das würde einfach verlangen, daß man sich an die Methode erinnerte, wie man zu drei gegebenen Linien die Vierte Proportionale findet.*
Nachdem bis hierhin der Begriff "Quadrat" nur geometrisch gedeutet worden war, wird seine Bedeutung jetzt erweitert (Leitsatz 23): *Das Produkt, das aus der Multiplikation einer Zahl mit sich selbst resultiert, ist das Quadrat dieser Zahl. Die Wurzel eines Quadrats ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert das Quadrat ergibt.* In diesem Abschnitt geht CLAIRAUT auf die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrats ein - ohne diesen Begriff

hier schon zu erwähnen: *Die Addition von ähnlichen Figuren liefert einen entscheidenden Beweis der Notwendigkeit, auf die Maßstäbe zu verzichten, wenn man die Operationen in einer Weise ausführen will, die streng bewiesen werden könnte.* Sodann gibt er ein Beispiel an: Eine Quadratseite des Quadrats, das verdoppelt werden soll, habe 100 Teile, so daß, um die Anzahl der Teile der Seite des verdoppelten Quadrats zu erhalten, man aus 20000 die Wurzel ziehen müßte. Ohne weitere Begründung schließt CLAIRAUT dieses Beispiel mit den Worten ab: *... aber welche Versuche sie auch immmer machten, sie würden herausbekommen, daß es vergeblich wäre, zwei Zahlen zu suchen, deren eine die Seite, oder in der gängigen Sprache, die Wurzel eines Quadrats ausdrücken würde, und deren andere die Seite, oder die Wurzel, des doppelten Quadrats angeben würde.*

In Abschnitt 24 wird noch einmal begründet, warum Seite und Diagonale eines Quadrats inkommensurabel sind. Abschnitt 25 nennt weitere Beispiele für inkommensurable Linien. *Aber daraus, daß mehrere Linien mit anderen inkommensurabel sind, könnte vielleicht Mißtrauen erweckt werden gegenüber der Exaktheit der Lehrsätze, deren wir uns bedient haben, um die Proportionalität ähnlicher Figuren festzustellen.* Dieser Einwand in Abschnitt 26 führt dazu, in Abschnitt 27 noch einmal die Proportionalität von Dreiecken, die inkommensurable Grundseiten haben, zu untersuchen. Leitsatz 27 (*Die Dreiecke und die ähnlichen Figuren haben proportionale Seiten, selbst wenn diese Seiten inkommensurabel sind*) wird so plausibel gemacht, daß die Seiten immer feiner eingeteilt werden, so daß der "inkommensurable Fehler" immer kleiner wird und somit *zu vernachlässigen ist, wenn man sich die Einteilung ... ins Unendliche fortgeführt denkt. ... Mit Hilfe ähnlicher Schlußfolgerungen* wird schließlich im letzten Abschnitt 28 des zweiten Teils gezeigt, *daß die Lehrsätze in den Abschnitten 44 und 47 des ersten Teils, wo man gezeigt hat, daß die Oberflächen ähnlicher Dreiecke und ähnlicher Figuren dasselbe Verhältnis haben wie die Quadrate ihrer entsprechenden Seiten, immer allgemein wahr sind, selbst wenn die Seiten dieser Figuren inkommensurabel sind.*

1.2.2.4 *Dritter Teil. Über das Maß der krummlinigen Figuren und ihre Eigenschaften*

In einer Vorbemerkung zum dritten Teil motiviert CLAIRAUT die Betrachtung krummliniger Figuren: *Nachdem man das Messen aller Arten von gradlinigen Figuren erledigt hatte, wollte man eine Methode haben, jene zu bestimmen, die von krummen Linien begrenzt sind. Die Gelände und allgemein die Flächen, deren Maß gesucht werden soll, sind nicht immer von geraden Linien begrenzt.* Damit die Untersuchungen aber nicht den Rahmen der "Anfangsgründe der Geometrie" übersteigen, *beschäftigen wir uns nur mit jenen, deren Umfänge Kreisbögen sind.*

Der Leitsatz 1 (*Das Maß des Kreises ist das Produkt seines Umfangs mit der Hälfte seines Radius*) wird durch ein einfaches Gedankenexperiment plausibel gemacht, indem in einen Kreis ein Polygon einbeschrieben wird und seine Eckenzahl fortlaufend erhöht wird. Eine Folgerung daraus ist Leitsatz 2: *Der Flächeninhalt des Kreises ist gleich einem Dreieck, dessen Höhe der Radius und dessen Grundseite eine gerade Linie gleich dem Kreisumfang ist.* Und in Abschnitt 3 heißt es weiter: *Es handelt sich also nur mehr darum, den Radius und den Kreisumfang zu haben. ... Man findet dieses Verhältnis* (von Radius und Kreisumfang) *auf Hunderttausendstel, auf Millionstel genau, und man kann sich so weit man will nähern, ohne daß man es genau bestimmen könnte.* Leitsatz 4 gibt den von ARCHIMEDES gefundenen Näherungswert von π an: *Hat der Durchmesser eines Kreises 7 Teile, so hat der Umfang ungefähr 22.* Und Abschnitt 5 vergleicht zwei Kreise miteinander: *Die Umfänge der Kreise verhalten sich wie ihre Radien* (Leitsatz 5).

Die Abschnitte 6 bis 10 behandeln Flächeninhalte, die ganz oder teilweise durch Kreise begrenzt sind. Leitsatz 6 (*Die Flächeninhalte der Kreise sind den Quadraten ihrer Radien proportional*) wird mit Hilfe von Abschnitt 2 hergeleitet, in dem der Kreisinhalt in ein rechtwinkliges

Dreieck übergeführt wurde, und von Abschnitt 47 des ersten Teils, der die Flächeninhalte ähnlicher Figuren vergleicht. Eine Folgerung daraus ist eine Erweiterung des Satzes von PYTHAGORAS (Leitsatz 7): *Von drei Kreisen, die als Radien die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks haben, ist derjenige mit der Hypotenuse als Radius gleich groß wie die beiden anderen zusammengenommen.* Leitsatz 8 definiert den Ring und gibt eine Berechnungsmöglichkeit seiner Fläche: *Ein Ring ist die zwischen zwei konzentrischen Kreisen eingeschlossene Fläche. Um einen Ring zu messen, muß man seine Dicke mit dem mittleren Kreisumfang multiplizieren.* Diese Formel wird in Abschnitt 8 mit Hilfe von Abschnitt 2 hergeleitet. Leitsatz 9 definiert den Kreisabschnitt: *Der Kreisabschnitt ist eine Fläche, die durch einen Bogen und seine Sehne begrenzt ist. - Das Maß aller krummlinigen Figuren läßt sich auf jenes des Kreisabschnitts zurückführen.* Hierbei ist zu berücksichtigen, daß laut Vorbemerkung zu diesem Teil nur Figuren betrachtet werden, die von Kreisbögen begrenzt sind. Leitsatz 10 definiert den Kreissektor: *Der Sektor ist ein Teil des Kreises, der von zwei Radien und dem Bogen, der zwischen ihnen liegt, begrenzt wird; sein Maß und das Maß des Abschnitts.*

Nach diesen Bemerkungen über den Flächeninhalt des Kreises und den Definitionen des Kreisabschnitts und des Kreissektors wendet sich CLAIRAUT dem Problem zu, *wie man den Mittelpunkt eines beliebigen Kreisbogens findet* (Leitsatz 11), *da es oft genug passiert, daß man nicht den Mittelpunkt des Bogens ... hat, wenn man eine Figur wie etwa ... messen will, und da man jedoch ohne dieses Zentrum die Figur nicht messen kann, da ja die vorhergehende Methode die Kenntnis des Radius erfordert, müssen wir den Mittelpunkt eines beliebigen Kreisbogens suchen* (Abschnitt 11). Dieses Problem wird in bekannter Weise mit Hilfe dreier verschiedener Punkte auf dem Kreisbogen gelöst. Da zur Lösung gar nicht der Kreisbogen, sondern nur die drei Punkte auf ihm benötigt werden, folgt daraus, daß drei beliebige Punkte - sofern sie nicht auf einer Geraden liegen - durch einen

Kreis miteinander verbunden werden können.

Heuristisch sehr ergiebig für den Mathematikunterricht scheint mir die mit Abschnitt 13 beginnende Herleitung des Peripheriewinkelsatzes zu sein.
Motiviert durch das sich in Abschnitt 12 ergebende Bild wird in Abschnitt 13 eine Reihe von systematisch angeordneten Einzelfällen - in operativer Weise - untersucht,

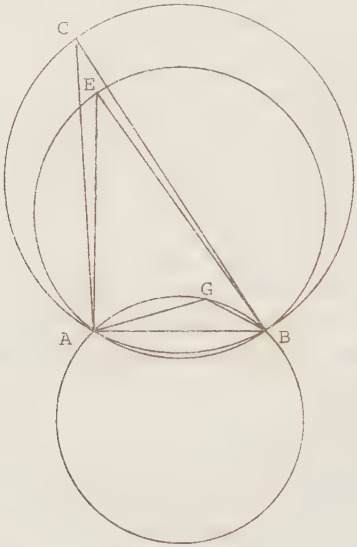


Fig. 11

(siehe Figur 11), wobei bemerkt wird, daß *der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises sich fortlaufend AB nähert,* je größer der Winkel an der Spitze ist, *und daß dieser Mittelpunkt schließlich unterhalb von AB wandert, wenn der Winkel an der Spitze AGB eine gewisse Öffnung angenommen hat. Sieht man nun den Mittelpunkt unterhalb von AB wandern, nachdem er vorher oberhalb war, so muß einem in den Sinn kommen, scheint mir, zu untersuchen, welcher Art das Dreieck AFB ist, wenn der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises auf AB selbst liegt* (Abschnitt 13). Die Untersuchung dieses Spezialfalls, die sich in der Tat in "natürlicher Weise" aufdrängt, liefert mit Hilfe der Betrachtung

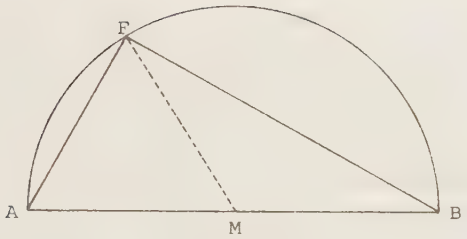


Fig. 12

der Teildreiecke AFM und MFB (siehe Figur 12) den Satz des THALES (der Satz über die Winkelsumme im Dreieck ist bereits behandelt).

Nach dieser Spezialisierung der Untersuchung auf den Satz des THALES wird dieser Satz nun seinerseits benutzt, um die Untersuchung in Abschnitt 14 wieder zu verallgemeinern: *Diese Eigenschaft des Kreises ... führt zur Untersuchung, ob die anderen Teile des Kreises nicht auch analoge Eigenschaften besitzen ...* (Hervorhebung von mir).

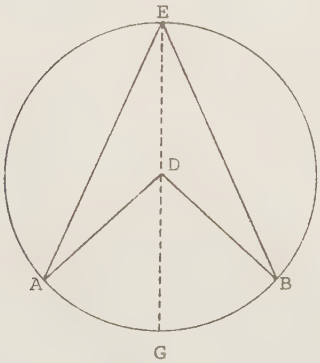


Fig. 14

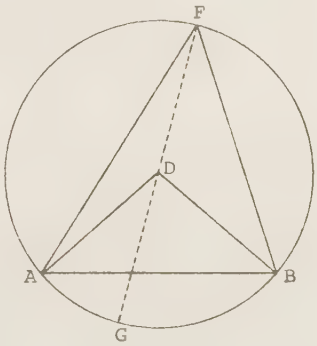


Fig. 15

Durch erneute Spezialisierung dieses allgemeinen Falls (vgl. Figur 14) ergibt sich zunächst der Satz, daß der Mittelpunktswinkel über demselben Bogen doppelt so groß ist wie der zugehörige Peripheriewinkel. Dies erhält man leicht durch Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks ADE und seines Außenwinkels ADG.

Dieselbe Methode führt in Abschnitt 15 bei allgemeiner Lage des Punktes F (vgl. Figur 15) wiederum zum Ziel, nur teilt hier die Linie FDG den Winkel AFB nicht in zwei gleiche Teile, so daß hier der Satz, daß der Außenwinkel eines Dreiecks gleich groß ist wie die beiden nichtanliegenden Innenwinkel, zweimal angewendet wird.

In einer Rückschau werden in Abschnitt 16 schließlich Zweifel an der Allgemeingültigkeit der angewendeten Methode ausgeräumt: *Unter den verschiedenen Winkeln, deren Spitze auf dem Bogen ACEFB*[1] *liegt, gibt es welche, von denen man zunächst glauben könnte, daß sie nicht im vorhergehenden Beweis mit erfaßt sind; das sind Winkel AFB derart,*

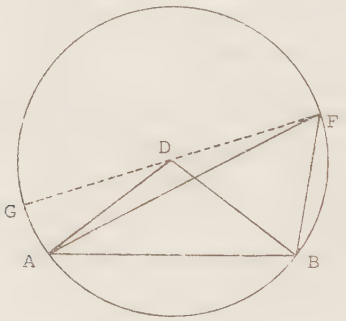


Fig. 16

daß die gerade Linie FDG, die durch den Mittelpunkt gezogen ist, außerhalb des Winkels ADB verläuft (Fig. 16) (Abschnitt 16). Die Rückschau in Abschnitt 16 ergibt, daß der Peripheriewinkel hier als Differenzwinkel von zwei Peripheriewinkeln zu sehen ist, die jeweils halb so groß sind wie die entsprechenden Mittelpunktswinkel. In analoger Weise werden die Zweifel an der Methode ausgeräumt in dem Fall, wo die Spitze des Winkels *auf einem Abschnitt liegt, der kleiner als ein Halbkreis ist* (Abschnitt 17).

In Leitsatz 18 werden die Begriffe "Tangente" und "Ab-

---

[1] CLAIRAUT bezieht sich hier auf seine Figur 13, die ich nicht wiedergebe.

schnittswinkel" definiert: *Die Tangente des Kreises ist die Linie, die ihn nur in einem Punkt berührt. - Der Abschnittswinkel ist derjenige, dessen Schenkel die Sehne und die Tangente sind. - Sein Maß ist die Hälfte des Bogens des Abschnitts.*[1] Dieser Leitsatz wird mit dem bekannten Gedankenexperiment hergeleitet, in dem die Spitze des Peripheriewinkels sich immer mehr einem Endpunkt der Grundlinie nähert. In diesem Abschnitt weist CLAIRAUT darauf hin, daß solche Überlegungen nicht angestellt werden können, *ohne auf die Geometrie des Unendlichen zurückzugehen, von der alle Menschen wenigstens eine unvollkommene Vorstellung haben, die nur ausgebaut werden muß.* Er ist sich aber der Schwierigkeiten bewußt, wenn er den Abschnitt beschließt: *Wenn die Anfänger jedoch meinen, daß dieser Beweis ihre Kräfte übersteigt, so kann man sie leicht in den Stand versetzen, einen anderen zu entdecken, indem man ihnen die Haupteigenschaft der Tangente erklärt.* Diese Haupteigenschaft nennt Leitsatz 19: *Die Tangente steht senkrecht auf dem Durchmesser, der durch den Berührungspunkt verläuft.* Mit dieser Erkenntnis läßt sich nun in Abschnitt 20 die Größe des Abschnittswinkels neu berechnen.

Diese Lösungsmethode wird nun in Abschnitt 21 aufgegriffen, um das folgende Problem zu lösen: *Über AB einen Kreisbogen zu zeichnen, der den gegebenen Winkel L* (als Peripheriewinkel) *fassen kann. ...* Im weiteren Verlauf des Abschnitts wird dann beschrieben, *was es heißt, daß ein Kreisbogen einen gegebenen Winkel fassen kann. - Methode, wie man einen Kreisbogen herstellt, der einen gegebenen Winkel fassen kann* (Leitsatz 21). Diese Methode wird in Abschnitt 22 auf ein Problem angewendet, dessen Lösung *oft in der Geographie notwendig ist: Wie man den Abstand eines Ortes zu drei anderen findet, deren Position bekannt*

---

[1] Das heute gebräuchliche Wort für "Abschnittswinkel" ist "Sehnentangentenwinkel".

ist (Leitsatz 22).

In Abschnitt 23 werden Ergebnisse aus dem ersten Teil, Abschnitte 38 und 39, über die Ähnlichkeit von Dreiecken und über die Proportionalität entsprechender Seiten in ähnlichen Dreiecken benutzt, um Leitsatz 23 zu beweisen: *Schneiden sich zwei Sehnen in einem Kreis, so ist das Rechteck aus den Teilen der einen gleich dem Rechteck aus den Teilen der anderen.* Ein Spezialfall davon ist Leitsatz 24: *Das Quadrat einer beliebigen Senkrechten auf dem Durchmesser eines Kreises ist gleich dem Rechteck aus den beiden Teilen des Durchmessers.* Damit ist auch das Problem gelöst, *wie man ein Rechteck in ein Quadrat verwandelt* (Leitsatz 25).
Eine begriffliche Neuinterpretierung desselben Problems liefert Abschnitt 26: *Was eine mittlere Proportionale zwischen zwei geraden Linien ist. - Die Methode, wie man sie findet* (Leitsatz 26). In Abschnitt 27 wird eine neue Methode angegeben, wie man die mittlere Proportionale von AB und AD erhält (vgl. Figur 28). Da die Dreiecke

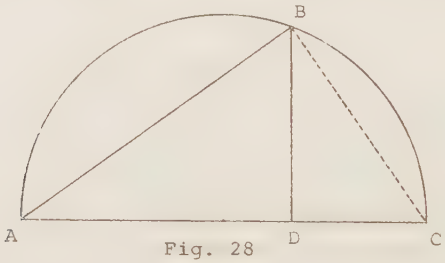


Fig. 28

ACB und ADB ähnlich sind, ist AB mittlere Proportionale zu AD und AC.

Die Abschnitte 28 und 29 beschäftigen sich mit der Quadratur geradliniger bzw. teilweise krummliniger Figuren. Jede geradlinig begrenzte Figur kann in Dreiecke zerlegt werden, diese können in Rechtecke verwandelt werden, und mehrere Rechtecke können nach Abschnitt 6 des zweiten Teils in ein einziges übergeführt werden. Die Quadratur krummliniger

Figuren in Abschnitt 29 ist natürlich nur näherungsweise möglich, *wenn man die Länge der Bögen, aus denen sie zusammengesetzt sind, praktisch ausgemessen hat.*

Die Abschnitte 30, 31 und 32 beschäftigen sich mit den Problemen, *wie man ein Quadrat herstellt, das zu einem anderen in einem gegebenen Verhältnis steht* (Leitsatz 30), *wie man ein Polygon herstellt, das zu einem ähnlichen Polygon in einem gegebenen Verhältnis steht* (Leitsatz 31), und *wie man einen Kreis herstellt, der zu einem anderen Kreis in einem gegebenen Verhältnis steht* (Leitsatz 32). Die beiden zuletzt genannten Probleme lassen sich auf das erste zurückführen. Zur Lösung des ersten teilt man eine Quadratseite so, daß die ganze Seite zu einem Teil im gegebenen Verhältnis steht. Die Parallele zu einer anderen Quadratseite durch den so erhaltenen Teilungspunkt läßt ein Rechteck entstehen, dessen Flächeninhalt gleich dem des gesuchten Quadrats ist.

Eine weitere Eigenschaft des Kreises behandelt Abschnitt 33: *Zieht man von einem Punkt außerhalb eines Kreises zwei Linien, die ihn durchqueren, so sind die Rechtecke, die jeweils aus diesen beiden geraden Linien und deren äußeren Stücken entstehen, gleich* (Leitsatz 33). Dieser Satz folgt wiederum aus der Betrachtung ähnlicher Dreiecke und der Anwendung früherer Ergebnisse über Proportionalitäten in ähnlichen Dreiecken.

Als Sonderfall dieses Satzes besagt Leitsatz 34: *Das Quadrat der Tangente ist gleich dem Rechteck aus der Sekante und ihrem äußeren Teil.*

Lehrt uns der im vorhergehenden Abschnitt bewiesene Lehrsatz, wie groß der Wert des Quadrats der Tangente ... ist, so lehrt er uns nicht, wie man diese Tangente vom gegebenen Punkt ... aus zieht. Abschnitt 35 beschäftigt sich daher als letzter Abschnitt des dritten Teils mit der bekannten Konstruktion, *wie man von einem gegebenen Punkt außerhalb eines Kreises an ihn die Tangente zeichnet* (Leitsatz 35). Benutzt wird das frühere Ergebnis, daß Tangente und Radius senkrecht aufeinander stehen.

1.2.2.5 *Vierter Teil. Über die Methode, Körper und ihre Oberflächen zu messen*

Die Lehrsätze, die wir in den ersten drei Teilen dieses Werks bewiesen haben, könnten uns dazu dienen, weitaus schwierigere Probleme zu lösen als die, die wir uns jetzt vornehmen werden; aber es entspricht mehr der Reihenfolge, an die wir uns zuvor gehalten haben, jetzt zum Maß der Körper überzugehen, das heißt, der begrenzten Größen, die zugleich drei Dimensionen haben, Länge, Breite und Tiefe (Vorbemerkung zum vierten Teil). Und um die angesprochene Reihenfolge möglichst analog beizubehalten, werden zunächst nur Körper betrachtet, *die von ebenen Flächen begrenzt sind.* Den einfachsten Körper definiert Leitsatz 1: *Der Würfel ist eine räumliche Figur, die durch sechs Quadrate begrenzt ist. Er ist das gemeinsame Maß der Körper.* Abschnitt 1 fährt fort: *Um die räumliche Ausdehnung der Körper zu messen, ist es natürlich, sie alle auf den einfachsten Körper zu beziehen, ebenso wie man zur Messung von Oberflächen sie alle auf das Quadrat bezogen hat.* Der nächsteinfache Körper ist der Quader (Leitsatz 2): *Ein Parallelepiped ist ein Körper, der von sechs Rechtecken begrenzt ist. - Die parallelen Flächen sind jene, die untereinander immer die gleiche Distanz haben. Das Maß des Parallelepipeds* (Leitsatz 3) wird in Abschnitt 3 in Analogie zum Maß des Rechtecks bestimmt. Abschnitt 4 gibt die Erzeugung des Parallelepipeds an (Leitsatz 4): *Parallelepipede entstehen durch ein Rechteck, das sich parallel zu sich selbst bewegt.*

Die Abschnitte 5 bis 10 beschäftigen sich mit Senkrechten und Ebenen. Leitsatz 5: *Die Linie, die senkrecht zu einer Ebene steht, ist diejenige, die sich auf keiner Seite zu dieser Ebene neigt. - Ebenso ist es mit einer Ebene, die senkrecht zu einer Ebene steht.* Leitsatz 6 (*Die Senkrechte zu einer Fläche steht senkrecht auf jeder Linie dieser*

Fläche, die vom Fußpunkt der Senkrechten ausgeht) wird in Abschnitt 7 sehr anschaulich klargemacht an einem rechteckigen Stück Karton, das parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten geknickt wird und auf eine ebene Fläche gestellt wird. Diese konkrete Konstruktion wird in Abschnitt 8 verwendet, um *eine einfache praktische Methode, um Senkrechten auf Flächen zu errichten oder zu fällen* (Leitsatz 8) zu erhalten. Eine Folgerung aus der Konstruktion ist Leitsatz 9: *Eine Linie steht senkrecht auf einer Fläche, wenn sie zu zwei Linien dieser Fläche senkrecht steht, die von ihrem Fußpunkt ausgehen.* Und schließlich liefert die Konstruktion auch eine *Methode, wie man eine Ebene senkrecht zu einer anderen errichtet* (Leitsatz 10).

Die Abschnitte 11 bis 13 beschäftigen sich mit Flächen bzw. Linien, die nicht senkrecht aufeinander stehen. Zur Lösung des Problems, *wie man eine Fläche parallel zu einer anderen zieht* (Leitsatz 11), läßt sich ebenfalls die Konstruktion von Abschnitt 8 heranziehen. Ebenfalls dafür, *wie man die Neigung einer Fläche gegenüber einer anderen mißt* (Leitsatz 12). Denn legt man ein Teilrechteck des geknickten Rechtecks auf die eine Fläche, *so leitet man daraus mühelos die folgende Regel ab. Sind zwei nichtparallele Flächen gegeben, so muß man anfangen, indem man die gerade Linie findet, die ihre gemeinsame Schnittlinie ist; sodann zeichnet man in einem beliebigen Punkt dieser Linie zwei Senkrechten, von denen jeweils eine in einer der beiden Flächen liegt; und der Winkel, den diese beiden Senkrechten untereinander bilden, mißt den Winkel, den die beiden gegebenen Flächen untereinander bilden.* Und eine Folgerung daraus ist die Lösung des Problems, *wie man die Neigung einer Linie gegenüber einer Fläche mißt* (Leitsatz 13).

Die Abschnitte 14 und 15 beschäftigen sich mit weiteren Methoden, wie man das Lot auf eine gegebene Fläche fällt bzw. Senkrechten errichtet. *Eine neue Methode, wie man das Lot auf eine gegebene Fläche fällt* (Leitsatz 14), ergibt

sich aus der Konstruktion von Abschnitt 12, indem hier eine beliebige Linie in der gegebenen Fläche gezeichnet wird und vom gegebenen Punkt aus das Lot auf diese Linie gefällt wird. In diesem Fußpunkt wird nun die Senkrechte auf der beliebigen Linie in der Fläche errichtet und schließlich vom gegebenen Punkt aus das Lot auf diese Senkrechte gefällt. Daraus leitet Abschnitt 15 eine *zweite Methode, wie man eine Senkrechte auf einer gegebenen Fläche errichtet* (Leitsatz 15), ab. Denn die Parallele durch den gegebenen Fußpunkt zu einem beliebig gefällten Lot auf die Fläche ist die Senkrechte.

Die Abschnitte 16 bis 25 beschäftigen sich mit geraden und schiefen Prismen, ihrer Erzeugung und ihrem Maß. Leitsatz 16 definiert das gerade Prisma: *Das gerade Prisma ist eine räumliche Figur, deren zwei gegenüberliegende Grundflächen gleiche Polygone sind und deren andere Flächen Rechtecke sind.* Die *Entstehung der geraden Prismen* (Leitsatz 17) analog zur Entstehung des Parallelepipeds ist Inhalt von Abschnitt 17. *Um die verschiedenen Arten von geraden Prismen zu unterscheiden, fügt man den Namen des Polygons hinzu, der ihnen als Grundfläche dient. Das Hexagonal-Prisma beispielsweise ist jenes, dessen Grundfläche ein Hexagon ist* (Abschnitt 18).

Die Abschnitte 19 und 20 vergleichen die Rauminhalte zweier Prismen: *Zwei Prismen, die gleiche Grundflächen haben, stehen im selben Verhältnis wie ihre Höhen* (Leitsatz 19). Und umgekehrt heißt es in Leitsatz 20: *Zwei Prismen, die dieselbe Höhe haben, stehen im selben Verhältnis wie ihre Grundflächen.*
Nach diesen beiden Bemerkungen ist es nicht schwer, die folgende Regel aufzustellen, um alle geraden Prismen zu messen (Abschnitt 21): *Das Maß des geraden Prismas ist das Produkt aus seiner Grundfläche und seiner Höhe* (Leitsatz 21).

Ab Abschnitt 22 werden die schiefen Prismen untersucht: *Die schiefen Prismen unterscheiden sich von den geraden*

darin, daß die Flächen, die bei jenen Rechtecke sind, bei diesen Parallelogramme sind (Leitsatz 22). Abschnitt 23 gibt eine Methode der *Erzeugung des schiefen Prismas* (Leitsatz 23) an, analog zur Erzeugung des geraden Prismas. In Abschnitt 24 wird der Rauminhalt des schiefen Prismas auf den des geraden zurückgeführt: *Die schiefen Prismen sind gleich den geraden Prismen, wenn sie die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe haben* (Leitsatz 24). Dieser Satz wird mit Hilfe des Prinzips von CAVALIERI gezeigt. *Und da die Parallelepipede zu den Prismen gezählt werden, dehnt man das, was wir gerade gesagt haben über Prismen, auf schiefe Parallelepipede aus; ...* (Abschnitt 25).

Die Abschnitte 26 bis 43 beschäftigen sich mit den Pyramiden und ihrem Raummaß. *Pyramiden sind Körper, die von einer gewissen Anzahl von Dreiecken begrenzt sind, die alle von einer gemeinsamen Spitze ausgehen und auf einem beliebigen Polygon als Grundfläche enden* (Leitsatz 26). *Man unterscheidet die Pyramiden voneinander, ebenso wie die Prismen, nach dem Namen der Figur, die ihnen als Grundfläche dient* (Abschnitt 27). Abschnitt 28 definiert die Begriffe "gerade Pyramide" und "schiefe Pyramide".

Die nun folgende Entwicklung der Volumenformel für die allgemeine Pyramide scheint mir eine heuristische Meisterleistung zu sein.
Nach der Berechnung des Volumens von geraden und schiefen Prismen und nachdem die Begriffe "gerade Pyramide" und "schiefe Pyramide" definiert sind, heißt es in Abschnitt 29: *Um die Methode zu entdecken, alle Arten von Pyramiden zu messen, gerade ebenso wie schiefe, beginnen wir, indem wir über diese Figuren einige allgemeine Betrachtungen anstellen, zu denen man durch die Kenntnis der Eigenschaften der Prismen geführt wird.*
Beachtet man die Gleichheit der Prismen, die dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe haben, so ist es natürlich, daß man sich daran erinnert, daß auch die Parallelogramme

untereinander gleich sind, wenn sie denselben Bedingungen genügen, und daß das gleiche auch für die Dreiecke gilt. Vergegenwärtigt man sich diese drei Wahrheiten auf einmal, so muß die Analogie glauben machen, daß die Eigenschaften, die den Parallelogrammen und den Dreiecken gemein sind, auch den Prismen und den Pyramiden gemein sind; man muß daher vermuten, daß die Pyramiden, die die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe haben, denselben Rauminhalt haben. Die anschließenden Überlegungen der Abschnitte 30 und 31, bei denen wieder - wie bereits bei den Prismen - das Prinzip von CAVALIERI benutzt wird, bestätigen diese Vermutung.
Da bei diesen Überlegungen die Kongruenz der durch Parallelschnitt entstehenden Schnittfiguren bzw. die Ähnlichkeit einer solchen Figur mit dem entsprechenden Grundpolygon benötigt werden, folgt nun in den Abschnitten 32 bis 36 ein Exkurs, *worin die Ähnlichkeit zweier Pyramiden besteht* (Leitsatz 32).

Das allgemeine Problem P (Berechnung des Volumens einer allgemeinen Pyramide) ist also bereits zurückgeführt auf das speziellere Problem P' (Berechnung des Volumens einer geraden Pyramide). CLAIRAUT formuliert dies so: *Also weiß man schon, ohne zu wissen, wie groß der Rauminhalt der Pyramide ist, mit Sicherheit, daß, wenn sie* (zwei Pyramiden) *die gleiche Höhe und die gleiche Grundfläche haben, sie gleich sind, so wie wir es vermutet haben ...* (Abschnitt 37). Mit "gleicher Grundfläche" ist hier "kongruente Grundfläche" gemeint.

Durch nochmalige Anwendung des Prinzips von CAVALIERI ergibt sich in Abschnitt 38, daß die Bedingung "kongruente Grundflächen" abgeschwächt werden kann in "gleich große Grundflächen".

Und nach der weiteren Bemerkung *Die Pyramiden, die dieselbe Höhe haben, verhalten sich zueinander wie ihre Grundflächen* (Leitsatz 39) ist CLAIRAUT fast am Ziel: *Da es sich also nur darum handelt, eine einzige Pyramide zu*

messen, um alle denkbaren Pyramiden zu messen, nehmen wir uns ein extrem einfaches Beispiel vor, das man erzeugen kann, indem man von den vier Winkeln A, B, C und H (Fig. 58) einer der Seiten eines Würfels ABCDEFGH vier Linien zum Punkt O zieht, dem Mittelpunkt des Würfels ... (Abschnitt 41).

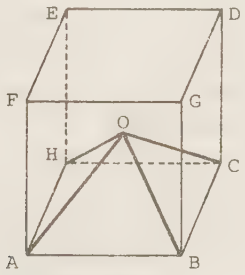


Fig. 58

Man sieht mühelos, daß diese Pyramide gleich dem sechsten Teil des Würfels ist ... (Abschnitt 41), woraus mit den Vorüberlegungen unmittelbar Leitsatz 42 folgt: *Der Rauminhalt einer beliebigen Pyramide ist das Produkt aus ihrer Grundfläche und dem Drittel ihrer Höhe.* Vergleicht man diesen Wert mit dem Rauminhalt des Prismas, so ergibt sich Leitsatz 43: *Die Pyramide ist ein Drittel des Prismas, das dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat.*

Durch fortlaufende Spezialisierung des Problems P ist es CLAIRAUT also gelungen, das allgemeine Problem P darauf zurückzuführen, das Volumen einer beliebigen Pyramide seiner Wahl zu messen. Die gewählte Pyramide bietet sich beinahe von selbst an, da der Würfel in sechs solcher gleicher Pyramiden zerfällt und sein Volumen besonders einfach berechnet werden kann. Damit ist das Pyramidenvolumen auf das Würfelvolumen zurückgeführt.

Mit Abschnitt 44 beginnt die Untersuchung der Körper, *deren Oberflächen gekrümmt sind.* Analog zu den Flächen wer-

den aber nur solche Körper untersucht, *deren Krümmungen kreisförmig sind.*
Bei der Untersuchung dieser Körper haben wir zwei Untersuchungsgegenstände, das Maß ihrer Oberfläche und jenes ihres Rauminhalts; denn da diese Oberflächen entweder ganz gekrümmt oder teilweise eben und teilweise gekrümmt sind, können wir ihr Maß nicht auf den ersten Teil zurückführen, so wie wir es mit den Körpern gemacht haben, die durch ebene Flächen begrenzt waren (Abschnitt 44).

Den *einfachsten aller gekrümmten Körper* definiert Leitsatz 45: *Der Zylinder ist ein Körper, der von zwei gegenüberliegenden parallelen Grundflächen, die zwei gleiche Kreise sind, und von einer Fläche, die um die Kreisumfänge gebogen ist, begrenzt ist; man unterscheidet den geraden Zylinder und den schiefen Zylinder.* Analog zur Erzeugung von Prismen beschäftigt sich Abschnitt 46 mit der *Erzeugung des Zylinders* (Leitsatz 46). Eine Betrachtung eines geraden Prismas mit steigender Eckenzahl des Grundpolygons liefert Leitsatz 47: *Die gebogene Oberfläche eines geraden Zylinders ist gleich einem Rechteck, das dieselbe Höhe hat, und dessen Grundseite gleich seinem Umfang ist. ... Was den schiefen Zylinder angeht, so kann man ihn nicht auf dieselbe Art messen ...* (Abschnitt 48). Da diese Aufgabe sehr schwierig ist, fällt sie *nicht in das Gebiet der Anfangsgründe.*

Was den Rauminhalt der Zylinder angeht, ob gerade oder schief, so ist nichts leichter, als ihn zu finden. Denn es ist offensichtlich, daß alles das, was wir über Prismen gesagt haben, auf Zylinder zutrifft, wenn man die Zylinder als die letzten Prismen ansieht, die man ihnen einbeschreiben kann (Abschnitt 49). Dementsprechend besagt Leitsatz 49: *Die Zylinder, die dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe haben, haben denselben Rauminhalt. ... Und das Maß eines beliebigen Zylinders ist das Produkt aus seiner Grundfläche und seiner Höhe* (Abschnitt 50).

Die Abschnitte 51 bis 59 beschäftigen sich mit Kegeln. *Der Kegel ist eine Art Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis*

ist; man unterscheidet den geraden Kegel und den schiefen Kegel (Leitsatz 51). *Um die Oberfläche eines geraden Kegels zu messen, betrachtet man ihn als die letzte der Pyramiden, die man ihm einbeschreiben kann; ...* (Abschnitt 53). Daraus folgt Leitsatz 53: *Die Oberfläche eines geraden Kegels wird gemessen, indem man die Hälfte seiner Seite mit dem Umfang seiner Grundfläche multipliziert.* Die Mantelfläche läßt sich mit Abschnitt 10 des dritten Teils auf andere Art berechnen, wenn man sie als Kreissektor deutet; Leitsatz 54: *Die Mantelfläche eines Kegels ist ein Kreissektor.* Das Problem der Oberflächenberechnung schiefer Kegel wird in Abschnitt 55, ebenso wie das der schiefen Zylinder, als zu schwierig angesehen.

In Analogie zur entsprechenden Aussage über Pyramiden besagt Leitsatz 56: *Die Kegel, die die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe haben, sind gleich. ... Und der Rauminhalt eines beliebigen Kegels ist das Produkt aus seiner Grundfläche und dem Drittel seiner Höhe* (Abschnitt 57).

Die Abschnitte 58 und 59 befassen sich mit geraden Kegelstümpfen. *Es ist offensichtlich, daß das Maß dieses Körpers gleich der Differenz zwischen den Rauminhalten der beiden Kegel ... ist* (Abschnitt 58). Als *Methode, wie man die Oberfläche eines Kegelstumpfs mißt* (Leitsatz 59), wird allerdings nicht die Differenzbildung zweier Oberflächen benutzt, sondern der Mantel des Kegelstumpfs wird als Kreisringsektor gedeutet, und dieses Problem war schon in Abschnitt 8, dritter Teil, gelöst.

Die Abschnitte 60 bis 72 befassen sich mit der Kugel: *Die Kugel ist der Körper, dessen Punkte auf der Oberfläche alle gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind* (Leitsatz 60). Zur Bestimmung der Oberfläche der Kugel wird in den Abschnitten 61 bis 65 die Kugel als *durch die Umdrehung eines Halbkreises „... um seinen Durchmesser ...* (Abschnitt 61) entstanden gedacht. *Nehmen wir zunächst an, daß wir anstelle des Halbumfangs ein regelmäßiges Polygon haben mit einer unendlichen Anzahl von kleinen Seiten, oder, wenn man will,*

mit einer sehr großen Anzahl von Seiten; ... (Abschnitt 61). Die so entstehenden Kegelstumpfmäntel (es entstehen ferner noch zwei Kegelmäntel) werden in Abschnitt 62 als Kreisringsektoren und damit als Rechtecke gedeutet. Und da alle diese Rechtecke die gleiche Höhe haben, läßt sich die gesamte Fläche als ein einziges Rechteck deuten. Dieses Rechteck ist allerdings sehr schwer konstruierbar, da seine Höhe verschwindend gering und seine Länge dementsprechend sehr groß ist. *Um dieser Unannehmlichkeit zu begegnen, ist es leicht, sich vorzustellen, alle diese kleinen Rechtecke in andere umzuwandeln, die immer noch gleiche Höhe haben, aber nicht mehr kaum wahrnehmbar ..., sondern groß genug, daß jede der Grundseiten viel kleiner wird; ...* (Abschnitt 62). *Setzen wir zunächst voraus, um das Problem zu vereinfachen, daß unsere Rechtecke, anstatt als Grundseiten Linien zu haben, die gleich dem Umfang ... sind, als Grundseiten nur die Radien KI dieser Kreisumfänge haben (Fig. 70)* (Abschnitt 63).

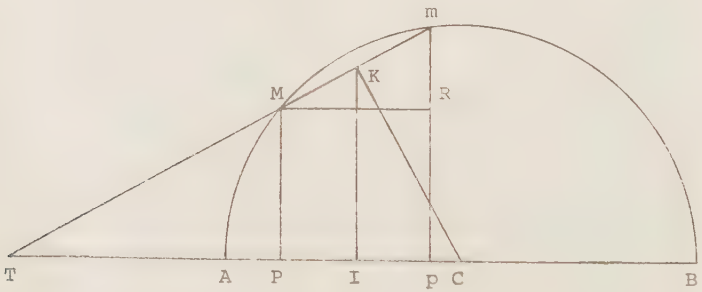


Fig. 70

Mit Hilfe ähnlicher Dreiecke wird nun gezeigt, *daß sich KC zu KI wie Mm zu MR verhält; ... oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß das Rechteck aus KC und MR oder Pp gleich dem Rechteck aus Mm und KI ist* (Abschnitt 63). *Aber da das Rechteck, das wir zunächst umwandeln wollten, nicht dasjenige aus Mm und KI war, sondern dasjenige aus Mm und dem Kreisumfang, dessen Radius KI war, erinnern wir uns hier daran, daß sich die Umfänge wie die Radien verhalten; ...* (Abschnitt 63). Diese Überlegungen führen schließlich

zu Leitsatz 65: *Die Oberfläche der Kugel hat als Maß das Produkt aus ihrem Durchmesser und dem Umfang ihres Großkreises.*

Abschnitt 66 beschäftigt sich damit, *was ein Kugelabschnitt ist; wie man seine Oberfläche mißt* (Leitsatz 66). Letzteres folgt unmittelbar aus der vorangehenden Berechnung der Kugeloberfläche. Eine weitere Folgerung daraus sind die Leitsätze 67 (*Die Oberfläche der Kugel ist gleich der des umbeschriebenen Zylinders*) und 68 (*Die Scheiben des Zylinders und der Kugel haben dieselbe Oberfläche*) sowie Leitsatz 69 (*Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß wie die des Großkreises*).

Mit dem Rauminhalt der Kugel beschäftigen sich die Abschnitte 70 bis 72: *Der Rauminhalt der Kugel ist das Produkt aus dem Drittel des Radius und der vierfachen Oberfläche des Großkreises* (Leitsatz 70), was so begründet wird, daß man *die Kugel als Zusammenfügung einer unendlichen Anzahl kleiner Pyramiden betrachten* (kann), *deren Spitzen in ihrem Mittelpunkt liegen, und deren sämtliche Grundflächen ihre gesamte Oberfläche bedecken* (Abschnitt 70). Aus Leitsatz 70 folgt unmittelbar Leitsatz 71: *Der Rauminhalt der Kugel ist zwei Drittel desjenigen des umbeschriebenen Zylinders.* Und mit dem *Maß des Rauminhalts eines Kugelabschnitts* (Leitsatz 72) befaßt sich Abschnitt 72.

Mit der Ähnlichkeit von Körpern befassen sich die letzten Abschnitte 73 bis 84 des vierten Teils und damit des ganzen Werks. Abschnitt 73 beschreibt, *worin die Ähnlichkeit zweier Körper besteht, die von ebenen Flächen begrenzt sind* (Leitsatz 73). Die bereits in Abschnitt 32 definierte Ähnlichkeit von Pyramiden wird hier analog übertragen auf alle Körper. Von *Bedingungen, die die Ähnlichkeit zweier gerader Zylinder bestimmen* (Leitsatz 74), handelt Abschnitt 74: wenn nämlich *ihre Höhen im selben Verhältnis stehen wie ihre Grundflächen* (Abschnitt 74). Abschnitt 75 nennt die Zusatzbedingung für schiefe Zylinder, und die Abschnitte

76 und 77 übertragen die Definitionen analog auf Kegel und Kegelstümpfe. *Die Kugeln, die Würfel und alle die Figuren, die nur von einer einzigen Linie abhängen, sind alle ähnlich* (Leitsatz 78). *Allgemein läßt sich über ähnliche Körper sagen, ebenso wie wir es über ebene Figuren gesagt haben, daß sie sich nur durch den Maßstab unterscheiden, in dem sie konstruiert sind* (Abschnitt 79).

Aus entsprechenden Sätzen des ersten Teils folgt Leitsatz 80: *Die Oberflächen ähnlicher Körper verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.* Analog gilt für Kugeln: *Die Oberflächen der Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien* (Leitsatz 81). *Die Proportionalität zwischen den Oberflächen der ähnlichen Körper und den Quadraten ihrer entsprechenden Seiten ist so allgemein, daß sie sich ebenso auf die Körper überträgt, die man nicht messen kann, wie auf jene, deren Maß man kennt* (Abschnitt 82).

Mit dem Rauminhalt ähnlicher Figuren befassen sich abschließend die letzten beiden Abschnitte: Leitsatz 83 (*Die ähnlichen Körper verhalten sich wie die Kuben ihrer entsprechenden Seiten*) wird analog zur entsprechenden Aussage über Flächen gezeigt. Abschnitt 84 vergleicht zwei Kugeln miteinander: *Die Rauminhalte der Kugeln beispielsweise verhalten sich offensichtlich wie die Kuben ihrer Radien.*

1.3 Eléments d'algèbre

1.3.1 Vorbemerkungen

Die "Eléments d'algèbre" erschienen im Jahr 1746 unter dem Originaltitel "Elémens d'algèbre". "Anfangsgründe der Algebra" (so der Titel der deutschen Übersetzung) ist das zweite der beiden Lehrbücher, die CLAIRAUT verfaßt hat.

Die Ausgabe von 1746[1] hatte sechs Auflagen, neben der von 1746 die zweite im Jahr 1749 bei Durand, die dritte bei zwei verschiedenen Verlegern 1753 bei David und 1763 bei Durand, die vierte im Jahr 1768 bei V^ve Savoye, die fünfte *avec des notes et des additions tirées en partie des leçons données à l'Ecole normale par Lagrange et Laplace et précédées d'un Traité élémentaire d'algèbre (par S.-F. Lacroix)* bei Duprat mit der Datierung nach der Revolution von 1789 "an V - 1797" und schließlich die sechste, wiederum bei zwei verschiedenen Verlegern, einmal bei Courcier im Jahr 1801 (an X) *avec des notes et des additions très étendues par le cit. Garnier ... précédées d'un traité d'arithmétique par le cit. Théveneau, avec une instruction sur les nouveaux poids et mesures*, und einmal als *dernière éd...* bei Emery, ebenfalls im Jahr 1801 (an IX - an X).

Im Gegensatz zu den "Eléments de géométrie", die in sehr viele Sprachen übersetzt wurden, sind die "Eléments d'algèbre" nur in drei Sprachen übertragen worden. Bereits im Jahr 1752 findet man eine deutsche Übersetzung von C. MYLIUS, erschienen in Berlin bei Nicolai unter dem Titel "Anfangsgründe der Algebra". Eine zweite Auflage dieser Übersetzung mit Zusätzen von C.F. von Tempelhoff erschien 1778 in Leipzig bei Kummer. Im Jahr 1760 erschienen bei Jan Morterre in Amsterdam die "Gronden der Algebra", übersetzt ins Holländische von A.B. STRABBE. Und im Jahr 1766 erschien schließlich eine teilweise Übersetzung der "Eléments d'algèbre" ins Englische unter dem Titel "Elements of algebra" bei Richardson & Urquhart in London.

Der folgenden Zusammenfassung des Inhalts der "Eléments d'algèbre" liegen die Ausgabe von 1746 und die Übersetzung ins Deutsche von 1752 zugrunde. Soweit nicht anders angegeben, sind die in Teil 1.3.2 enthaltenen Zitate dieser Übersetzung entnommen.

Die "Eléments d'algèbre" sind vom heuristischen Stand-

---

[1] Die folgenden Ausführungen über Neuauflagen und Übersetzungen sind zum größten Teil wiederum (TATON 1976) entnommen.

punkt aus nicht so ergiebig wie die "Eléments de géométrie", was sicherlich auch an der geringeren Anschaulichkeit algebraischer Probleme liegt. Dies macht sich insbesondere in den letzten Teilen des Werks bemerkbar.

Eine durchgängige heuristische Strategie in den "Eléments d'algèbre" ist die Methode, von konkreten Problemen auszugehen, mehrere solcher konkreter Probleme zu lösen, bis der Leser dahin geführt wird, das Problem allgemein (mit Hilfe von Variablen) zu lösen, diese allgemeine Lösung dann wiederum auf kompliziertere konkrete Probleme anzuwenden, so daß aus der allgemeinen Lösung eventuell neue Probleme entstehen, diese Probleme wiederum an konkreten Einzelproblemen zu untersuchen, zu lösen, allgemein zu lösen und so fort.

1.3.2 Zusammenfassung der "Eléments d'algèbre" unter besonderer Berücksichtigung der angewendeten heuristischen Strategien

Dem etwa siebzehnseitigen Vorwort folgen fünf zwischen 36 und 100 Seiten lange Teile mit den Titeln

1. *Von der algebraischen Methode, die Aufgaben durch Gleichungen auszudrücken, und von der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade,*
2. *Von der Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade,*
3. *In welchem man einige Grundregeln für die Gleichungen von allen Graden giebt, nebst der Methode, aus diesen Gleichungen die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade, welche sie etwan in sich haben, herzuleiten,*
4. *Von der Auflösung der Gleichungen von jeglichen Graden, wenn sie nicht mehr als zwey Glieder haben, oder wenn sie zwar drey Glieder haben, aber durch Hülfe der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade, auf zwey Glieder gebracht werden können; nebst verschiedenen um dieser Gleichungen willen anzustellenden Verrichtungen, z.E. der Erhöhung der Potenzen, der Ausziehung der Wurzeln, der Entwickelung*

der Wurzelgrößen etc.,
5. *Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade.*

Jeder dieser Teile ist - analog zu den "Eléments de géométrie" - in kurze, selten mehrseitige, meistens nur aus wenigen Sätzen bestehende Abschnitte unterteilt, die römisch numeriert sind, und deren mathematischer Inhalt als Leitsatz und als Information darüber, was der jeweilige Abschnitt beinhaltet, sich am Rand neben diesem Abschnitt befindet.

1.3.2.1 Vorwort

Im Vorwort der "Eléments d'algèbre" geht CLAIRAUT nicht so weit auf die allgemeinen Schwierigkeiten beim Unterrichten von Mathematik ein wie im Vorwort der "Eléments de géométrie". In der kurzen Zusammenfassung des Inhalts der "Eléments d'algèbre", aus der das Vorwort besteht, finden sich aber einige Nebenbemerkungen, die deutlich werden lassen, daß es CLAIRAUT auf eine genetische Darstellung der Algebra ankommt. So stellt er im ersten Abschnitt des Vorworts einen Bezug zu den "Eléments de géométrie" her: *Ich habe mir vorgesetzt, in diesem Werke eben derjenigen Lehrart zu folgen, welche ich in meinen Anfangsgründen der Geometrie beobachtet habe. Ich habe mich darinne bemühet, die Regeln der Algebra in einer Ordnung vorzutragen, welcher sich die Erfinder vielleicht bedienet haben. Keine Wahrheit erscheinet darinnen unter der Gestalt eines Lehrsatzes. Sie scheinen alle entdeckt zu werden, indem man sich an denen Aufgaben übt, welche man sich entweder aus Nothwendigkeit, oder aus Neugier, aufzulösen vorgenommen.*

Die abkürzende Schreibweise der Algebra motiviert CLAIRAUT so: *Bey dieser Auflösung kann man leicht sehen, daß, wenn das Gedächtnis zureicht, alle Schlüsse zu behalten, welche man machen muß, um zu derselben zu gelangen, dieses alsdenn angeht, wenn die Reihe dieser Schlüsse nicht allzu lang ist. Man sieht aber zugleich, daß, wenn man zu Aufga-*

ben fortgehet, welche eine größere Reihe Schlüsse erfordern, man sich bemühen muß, sie auf das kürzeste aufzuschreiben. Man muß sich einige Zeichen ausdenken, durch welche man das ausdrücken kann, worauf die Schwierigkeit bey jedem Schritte, den man thut, die Aufgabe aufzulösen, ankömmt.

Und weiter: *Um allezeit von dem Einfachsten auf das am meisten zusammengesetzte fortzugehen, werfe ich anfänglich nur Fragen in Zahlen auf, weil darauf die Gedanken der Anfänger am meisten haften. Nachdem man unterschiedene solche Aufgaben, welche von einander nur durch die in der Aufgabe gegebene Zahlen unterschieden sind, aufgelöset hat, so merkt man leicht, daß alle Auflösungen einen Theil der Operation allemal mit einander gemein haben, und daß es zu wünschen wäre, daß man die Operation nur einmal verrichten dürfte.*

Die allgemeinen Regeln für die Addition (*Zusammensetzung*), Subtraktion, Multiplikation (*Vermehrung*) und Division werden erst eingeführt, wenn ihre Behandlung durch Aufgaben motiviert ist: *Unter den verschiedenen Aufgaben, in welchen ich mich der Buchstaben, anstatt der Zahlen, bediene, finden sich ziemlich verwickelte, welche man nicht auflösen kann, ohne sich der Regeln der Zusammensetzung, der Abziehung, der Vermehrung und der Theilung zu bedienen.*

Die Entwicklung der Motivation des Lesers von der außermathematischen zur innermathematischen ist schließlich Gegenstand einer Bemerkung zum dritten Teil: *Übrigens halte ich mich in diesem und den folgenden Theilen nicht, wie in den beyden vorhergehenden, dabey auf, die Aufgaben zu zeigen, welche vielleicht zu den Gleichungen, die ich untersuche, Gelegenheit gegeben haben; weil ich glaube, daß ich dieses Mittel nicht mehr nöthig habe, die Neugier der Leser zu erregen. Sie haben aus den ersten Aufgaben hinlänglich sehen können, wie nöthig es ist, alle Arten von Gleichungen auflösen zu können.*

1.3.2.2 *Erster Theil. Von der algebraischen Methode, die Aufgaben durch Gleichungen auszudrücken, und von der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.*

Als *Exempel einer Aufgabe, dergleichen sich die ersten Algebraisten vielleicht aufgegeben haben* (Leitsatz 1), wählt CLAIRAUT folgende Aufgabe: *Eine Summe, zum Exempel 890 Thl. unter drey Personen zu theilen, so, daß der erste 180 Thl. mehr, als der zweyte, und der zweyte 115 Thl. mehr bekomme, als der dritte.* Es folgt dann in Abschnitt 1 die *Auflösung dieser Aufgabe ohne Algebra* (Leitsatz 1, 2. Teil), wobei der kleinste Anteil als unbekannt angesehen wird. In Abschnitt 2 wird anhand desselben Problems die *algebraische Methode, die vorhergehende Aufgabe auszudrücken,* entwickelt, *damit wir die ersten Gründe dieser Wissenschaft desto besser zeigen.* Die entstehende Gleichung $3x + 410 = 890$ wird ausführlich hergeleitet, wobei die Zeichen "+" und "=" usw. und der Begriff "Gleichung" durch Leitsätze am Rand der Seite noch einmal erklärt werden. Mit der Auflösung der Gleichung beschäftigt sich Abschnitt 3: *Man löset eine Gleichung auf, wenn man den Werth der unbekannten Größe findet, welche sie in sich enthält. Auflösung der Gleichung, welche die vorhergehende Aufgabe ausdrückt* (Leitsatz 3). Mit *eine*(r) *andere*(n) *Auflösung der vorhergehenden Aufgabe* (Leitsatz 4) beschäftigt sich Abschnitt 4. Hier wird der größte Teil der Summe als Unbekannte angesehen. In den nächsten Abschnitten 5, 6 und 7 werden *ein ander Exempel der vorhergehenden Aufgabe* (Leitsatz 5), ein *drittes Exempel der vorhergehenden Aufgabe* (Leitsatz 6) und *eine neue Aufgabe, von eben der Art, wie die vorhergehende* (Leitsatz 7), behandelt. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben steigt hierbei langsam an, da die zweite Aufgabe noch völlig analog zur ersten ist (9600 soll in vier Teile geteilt werden), wohingegen das dritte Beispiel schon dadurch schwieriger wird, daß *5500 in zwey*

Theile zu theilen (ist), *so, daß in dem ersten ein Drittel mehr sey, als in dem zweyten, und noch 180 drüber.* Anhand der dabei entstehenden äquivalenten Gleichungen $\frac{7x}{3} = 5320$ bzw. $7x = 5320 \cdot 3$ wird die *Vermehrung* (Multiplikation) eingeführt[1]. Die Aufgabe in Abschnitt 7 behandelt schließlich die Aufteilung eines Gewinns unter Kaufleuten im Verhältnis ihrer Einlagen, wenn der Geschäftsführende drei Prozent des Gesamtgewinns noch zusätzlich bekommen soll.

Mit Abschnitt 8 beginnt eine Rückschau auf die bisherigen Aufgaben. So besagt Leitsatz 8: *Die analytische Auflösung einer Aufgabe hat zween Theile. In dem ersten drückt man diese Aufgabe durch eine Gleichung aus. In dem zweyten löset man diese Gleichung auf.* Leitsatz 9 definiert die Gleichungen ersten Grades: *Die Gleichungen vom ersten Grade sind diejenigen, wo die unbekannte Größe nur mit bekannten Größen vermehret oder getheilet ist.* Anhand einer bei den ersten Aufgaben aufgetretenen Gleichung wird der Begriff "Glieder einer Gleichung" in den Abschnitten 10 und 11 behandelt. Leitsatz 10 definiert den Begriff: *Die Glieder einer Gleichung sind ihre durch + und - von einander abgesonderten Theile.* Leitsatz 11 macht eine Aussage über das Rechnen mit ihnen: *Ein jedes Glied kann von einer Seite der Gleichung auf die andere versetzet werden, wenn man seine Zeichen verwechselt. ... Durch Hülfe dieses Grundsatzes kann man allezeit eine Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher man auf der einen Seite des Zeichens = ... die Glieder mit einem x, und auf der anderen Seite des Zeichens = ... lauter bekannte Größen hat* (Abschnitt 12). Leitsatz 12 definiert: *Man nennet die Hälfte einer Gleichung ihre beyden durch das Zeichen = von einander abgesonderten Theile.* Nachdem die Glieder getrennt sind und die Gleichung beispielsweise $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$ heißt, *so ist nunmehr das natürlichste, daß man*

---

[1] Die Multiplikation ist in (CLAIRAUT 1746) und in (CLAIRAUT 1752) durch ein "x" bezeichnet. Da dieses Zeichen sehr leicht mit den Buchstaben "x" bzw. "x" verwechselt werden kann, verwende ich im folgenden immer das Zeichen ".".

beyde Hälften der Gleichung auf das einfachste ausdrücke (Abschnitt 13). Ist das geschehen, so geht es noch darum, *wie man den Vermehrer von einer unbekannten Größe wegschafft* (Leitsatz 14). Diese Methode wird, ebenso wie die vorhergehende, an den Gleichungen der anfangs behandelten Aufgaben hergeleitet. Analog zu Abschnitt 14 beschäftigt sich Abschnitt 15 damit, *wie man den Theiler von einer unbekannten Größe wegschafft* (Leitsatz 15). *Mit diesen Regeln ist man im Stande, alle Arten von Gleichungen vom ersten Grad aufzulösen* (Abschnitt 16). Es folgen einige *Exempel von Gleichungen vom ersten Grade, welche nach den vorhergehenden Grundsätzen aufgelöset werden* (Leitsatz 16).

In Abschnitt 17 wird anhand einer Beispielgleichung, bei der die Nenner teilerfremd sind, hergeleitet, *wie man die Brüche aus einer Gleichung wegschafft* (Leitsatz 17), *anstatt alle Brüche auf einen Nenner zu bringen* (Abschnitt 17), nämlich indem man sukzessive mit den Nennern multipliziert. *Wie man sie auf eine andere Art alle auf einmal wegschafft* (Leitsatz 18), indem man *alle Glieder durch eine Zahl vermehret, welche durch einen jeden von diesen Theilern kann getheilet werden* (Abschnitt 18), ist Gegenstand von Abschnitt 18.
Damit wir auf die möglichst wahrscheinliche Art der Ordnung der Erfinder folgen mögen, so wollen wir uns itzo nicht dabey aufhalten, die Art, wie man die unbekannte Größe allein bekömmt, ferner zu untersuchen, sondern wir wollen wieder zurück auf die Art und Weise gehen, wie man die Aufgaben in Gleichungen bringet (Abschnitt 19). Um dieses Ziel zu verfolgen, wird die *dritte Aufgabe* (Leitsatz 19) gestellt: *Es soll einer eine gewisse Anzahl Arbeiter, jeden mit 3 Thl. bezahlen, und es fehlen ihm 8 Thl. Wenn er aber einem jeden 2 Thl. giebt, so behält er 3 Thl. übrig. Man fragt, wieviel Geld er hat?* Diese Aufgabe führt zur Gleichung $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, in der die unbekannte Größe auf beiden Seiten auftritt. Abschnitt 20 macht die Bemerkung, *daß es bey derselben* (Gleichung) *nicht erlaubt*

seyn würde, die Regel aus dem 11. §. anzuwenden, und die Größen -3 und +8 der Stelle und dem Zeichen nach mit einander zu verwechseln, denn *die Größe* $\frac{x-3}{2}$ *ist in der That nur ein einzig Glied der Gleichung ...* (Abschnitt 20). Nachdem die dritte Aufgabe in Abschnitt 19 so gelöst worden war, daß *x die Anzahl der Thaler* war, bringt Abschnitt 21 *eine andere Auflösung eben derselben Aufgabe* (Leitsatz 21), indem hier *y die Zahl der Arbeiter* sei. In Abschnitt 22 wird die *vierte Aufgabe* (Leitsatz 22) behandelt: *Ein Bote, welcher in 2 Stunden 5 Meilen geht, ist vor 9 Stunden von einem Orte abgegangen. Man schickt ihm einen anderen Boten nach, dessen Geschwindigkeit so groß ist, daß er in 3 Stunden 11 Meilen geht. Nun will man wissen, wo der zweyte Bote den ersten antreffen wird?* Wird mit x der Weg bezeichnet, so führt die Rechnung über zwei Dreisatzrechnungen zur Gleichung $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x$. Abschnitt 23 verkompliziert die Aufgabenstellung, indem nun angenommen wird, der erste Bote sei *von einem weiter vorwärts gelegenen Orte abgereiset ...* Auf ähnliche Weise wie bei der einfachen Aufgabe bekommt man *also die Gleichung* $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$ ...

Nachdem die ersten Algebraisten die Auflösung einer Aufgabe, woran ihnen gelegen war, gefunden hatten, so haben sie vermuthlich verschiedene Anwendungen davon gemacht, indem sie für die gegebenen Zahlen in diesen Aufgaben andere gesetzt haben. Sie werden z.E. die vorhergehende Aufgabe etliche mal so wiederholet haben, daß sie darinne die Verhältnisse der Geschwindigkeiten der Boten und den Unterschied der Zeit ihrer Abreisen verändert. Bey diesen verschiedenen Anwendungen haben sie gemerket, daß man einen Theil der Rechnung bey jedem besondern Exempel eben derselben Aufgabe wiederholen muß, und daß man diese Arbeit einmal für allemal verrichten könnte, wenn man eine Auflösung suchte, bey der man sich nicht an diese oder jene besondere Zahl bände, sondern die allgemein wäre, und sich für eine jede gegebene Zahl schickte. Damit wir zeigen, was sie sich zu diesem Ende ausgedacht haben, wollen

wir die vorhergehende Aufgabe wieder vornehmen, und sie so allgemein ausführen, als es uns möglich seyn wird (Abschnitt 24). Zu diesem Zweck wird die Entfernung beider Boten mit a bezeichnet, die Geschwindigkeit des ersten Boten mit b usw. Man erhält so also die *allgemeine Auflösung der vorhergehenden Aufgabe* (Leitsatz 24). Dieses allgemeine Ergebnis erfährt nun in Abschnitt 25 eine *Anwendung der vorhergehenden Auflösung auf Zahlen.*

Um die Anfänger an den Umgang mit allgemeinen Lösungen zu gewöhnen, *wollen wir itzo folgende Aufgabe auflösen. Ein Handwerksmann kann eine gewisse durch a ausgedrückte Arbeit in einer durch b ausgedrückten Zeit verfertigen. Ein zweyter Handwerksmann verfertiget die Arbeit c in der Zeit d, und ein dritter Handwerksmann verfertiget die Arbeit e in der Zeit f. Man fragt, wieviel Zeit diese drey Handwerksleute brauchen, wenn sie alle zusammen arbeiten, um die Arbeit g zu Stande zu bringen?* (Fünfte Aufgabe, Abschnitt 26).
Diese Aufgabe führt zur allgemeinen Lösung $x = \frac{bdfg}{bde+bcf+adf}$.
In den Abschnitten 27 und 28 wird diese allgemeine Lösung benutzt, um zwei verschiedene Aufgaben vom gleichen Typ mit konkreten Zahlenangaben zu lösen.

Mit Abschnitt 29 beginnt ein langer Unterteil des ersten Teils über die Auflösungen von *Buchstabengleichungen vom ersten Grade. ... Aus den beyden vorhergehenden Aufgaben erhellet, daß die im X. und folgenden §§. zu Auflösung der Zahlengleichungen, des ersten Grades gegebenen Regeln auch bey den Buchstabengleichungen angewendet werden können. Aber man sieht auch, daß diese Regeln zu kurz sind, als daß die Anfänger nicht noch eine Anleitung in der Art, sie anzuwenden, nöthig haben sollten. Wir halten uns um desto mehr verbunden, ihnen durch eine große Menge solcher Anwendungen zu helfen, da es wahrscheinlich ist, daß man dergleichen Arbeiten viele sehr nützliche algebraische Operationen zu danken hat, welche wir, so zu sagen, im Fortgehen entdecken werden.* Als erstes Beispiel wird dann die Gleichung $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$

nach x aufgelöst. In Abschnitt 30 folgt ein *zweytes Exempel von Auflösung der Buchstabengleichungen* (Leitsatz 30). Bei den letzten beiden Gleichungen trat das Problem auf, Terme wie etwa 2ac und 3ac zusammenzufassen. Diese *Abkürzung der Größen, oder deren Verwandlung in ihre einfachste Ausdrückung* (Leitsatz 31), ist das Thema von Abschnitt 31. Ferner wird in diesem Abschnitt noch definiert: *Man nennet positive Glieder diejenigen, vor welchen ein +, und negative, diejenigen, vor welchen ein - steht* (Leitsatz 31, 2. Teil). Abschnitt 32 macht deutlich, daß es sich bei der eben ausgeführten *Abkürzung der Größen* um nichts anderes als die Addition handelt: *Die algebraische Zusammensetzung ist eben die vorhergehende Operation* (Leitsatz 32). Da bei den Beispielen auch negative Glieder addiert werden, behandelt Abschnitt 33 die Frage, *wie man sagen kann, daß man eine negative Größe zu einer anderen setze* (Leitsatz 33). Zur Erklärung wird das Beispiel zweier Personen gewählt, die ihre *Güter zusammenbringen*, von denen der eine mehr Schulden als Güter hat. *Aus der vorhergehenden Operation folgt auch die algebraische Abziehung* (Leitsatz 34). Abschnitt 34 sagt, *wie das Abziehen geschieht* (Leitsatz 34, 2. Teil): *Wenn man also zwo Größen hat, da die eine soll abgezogen werden, so muß man die Zeichen derjenigen Größe ändern, welche man abziehen will, dieselbe neben der andern Größe schreiben, und hernach den Ausdruck der Größen von einer Art verkürzen ...* Eine Folgerung daraus ist Leitsatz 35: *Man vergrößert eine Größe, wenn man eine negative Größe davon abziehet.*

Als *drittes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen* (Leitsatz 36) behandelt Abschnitt 36 die Gleichung $\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$. Das ausführlich hergeleitete Ergebnis $x = \frac{3aacc-8aabd}{3bcc-6abc}$ führt im folgenden Abschnitt 37 zur Einführung des Potenzierens[1]: *Eine über einen Buchstaben und zur Rechten desselben gesetzte Ziffer zeigt an, daß er so*

---

[1] Die verschiedenen Schreibweisen der Potenzen - wie etwa "aacc" - sind jeweils (CLAIRAUT 1746) bzw. (CLAIRAUT 1752) entnommen.

vielmal durch die Vermehrung hätte wiederholet werden sollen. ... Und in diesem Falle sagt man, daß der Buchstabe zu derjenigen Potenz erhoben worden, welche die Ziffer ausdrückt, die man den Exponenten nennet. ... Die Ziffern, welche zur Linken und in eben derselben Linie stehen, werden Coefficienten genennet. (Leitsätze 37.)

Ein *viertes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen* (Leitsatz 38), in dem bereits Potenzen auftreten, bringt Abschnitt 38. Leitsatz 39 definiert zunächst: *Unverwickelte Größen sind diejenigen, welche nur ein Glied haben,* Abschnitt 39 leitet dann *die Vermehrung der unverwickelten Größen ... aus den beyden vorhergehenden Exempeln ...* her.

Wurden bis jetzt nur Gleichungen betrachtet, deren Lösungen nicht weiter gekürzt werden konnten, so behandelt Abschnitt 40 als *fünftes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen* (Leitsatz 40) die Gleichung $\frac{a^2c}{2b^2} + \frac{4cx}{3a} = \frac{5ab}{c} - 3a$,

die zur Lösung $x = \frac{30a^2b^3}{8b^2c^2} - \frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2} - \frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$ und schließlich

zur gekürzten Lösung führt. Naheliegenderweise wird nun in Abschnitt 41 *die Theilung der unverwickelten Größen ... an diesem Exempel hergeleitet* (Leitsatz 41): *Erstlich muß man die Coefficienten theilen, wenn die Theilung möglich ist, alsdann jeden Buchstaben, welcher einerley Exponenten in dem Zähler und Nenner hat, weglassen, und hernach die Buchstaben, die im Nenner andere Exponenten haben, als im Zähler, durch einander theilen, indem man die kleineren Exponenten von den größeren abzieht, und die übrig gebliebenen Exponenten da läßt, wo die größern Exponenten waren. Was die von einander unterschiedenen Buchstaben anlangt, so hat man nichts dabey zu thun, als daß man sie abschreibt.*

Als *sechstes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen* (Leitsatz 42) dient die Gleichung $\frac{aax}{b-c} + dc = bx - ac$, die mit dem *Theiler b-c* ein neues Problem eröffnet. Die mit b-c multiplizierte Gleichung führt hier zur Gleichung $aax + \overline{b-c} \cdot dc = \overline{bx-ac} \cdot \overline{b-c}$. *Die Querstriche über den Größen*

dienen eben dazu, wozu die Haken dienen (Leitsatz 42), wobei mit "Haken" Klammern gemeint sind. *Nun kömmt es darauf an, daß man die durch das Zeichen × angezeigten Vermehrungen vornimmt*[1]. *Wir wollen zuerst dc durch b-c vermehren. Es ist klar, daß man dc durch b wird vermehren, und davon das Product von dc durch c abziehen müssen. Denn da b-c um c kleiner ist, als b, so muß das Product davon durch dc um die Größe c.dc kleiner seyn, als das Product von b durch dc. Das Product von b-c durch dc ist also bdc-ccd* (Abschnitt 42). In ähnlicher Weise wird danach das zweite Produkt aufgelöst, wobei CLAIRAUT die Multiplikation zweier negativer Glieder geschickt umgeht, indem er sagt: *Die erstere von diesen beyden Vermehrungen, nämlich bx-ac durch b, wird bbx-abc und die letztere, nämlich bx-ac durch c, wird bcx-acc geben. Es ist also noch übrig, diese letzte Größe von der ersten abzuziehen ...*

In Abschnitt 43 wird *die Vermehrung der verwickelten oder vielgliederigen Größen ... aus dem vorhergehenden §. hergeleitet* (Leitsatz 43). Es folgen in diesem und im nächsten Abschnitt 44 einige *Exempel der Vermehrung vielgliederiger Größen* (Leitsatz 43). Die *Grundregel der Vermehrungen* nennt Abschnitt 44 im letzten Abschnitt: *Ueberhaupt sieht man, wenn eine zu vermehrende Größe, oder welche vermehret (multipliciret) werden soll, nebst der Größe, durch welche sie vermehret werden soll, gegeben ist, so müße man alle Producte jener Größe durch ein jedes Glied des Vermehrers machen, und diese Producte, nachdem die Glieder, aus welchen sie entstanden sind, das Zeichen + oder - haben, zu einander setzen, oder von einander abziehen.* In Abschnitt 45 wird allgemein erklärt, *wie man bey dem Vermehren verfahren muß* (Leitsatz 45). Die kritische Stelle, wenn zwei Glieder negativ sind, umgeht CLAIRAUT wieder: *Wenn es* (ein Glied der ersten Summe) *aber das Zeichen - hat, so setzt man vor ein jedes der Producte, woraus diese Zeile zusammengesetzt ist, ein dem Zeichen des Gliedes der zu vermehrenden Größe,*

---

[1] Aus schreibtechnischen Gründen verwende ich allerdings immer - auch innerhalb der Zitate - das Zeichen "·" (vgl. die Fußnote auf S. 68), wenn in (CLAIRAUT 1746) das Zeichen "×" steht.

worauf es sich beziehet, entgegengesetztes Zeichen. Da diese Methode in Abschnitt 45 nur allgemein beschrieben worden ist, beschäftigt sich Abschnitt 46 mit der *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 46), nämlich auf das Produkt (2ab-4ac+ad)(3ab-5ac+2ad). Dieses Produkt wird ausführlich auf zwei Seiten ausgerechnet.

Abschnitt 47 präsentiert ein *siebendes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen* (Leitsatz 47). Diese Gleichung wird nicht mehr anhand einer Aufgabe motiviert, sondern es heißt zu Beginn des Abschnitts einfach: *Es sey* $\frac{abb+abd-abx}{d-c} = ax-ac$. Nach einiger Rechnung ergibt sich $x = \frac{abb+abd+acd-acc}{ab+ad-ac}$. *In diesem Ausdrucke bemerkt man ein gewisses Verhältniß zwischen den Gliedern der zu theilenden Größe und den Gliedern des Theilers, woraus man vermuthen kann, daß die Theilung vollkommen werde geschehen können, und wodurch man bewogen wird, diese Operation zu versuchen, welche ziemlich leicht seyn muß, nachdem man gesehen hat, wie die Vermehrung, welche das Umgekehrte davon ist, geschiehet.* Der Rest des Abschnitts stellt dann ohne jede Herleitung die Methode dar, *wie man die in diesem Exempel angedeutete Theilung verrichtet* (Leitsatz 47), anders ausgedrückt, die Methode der Polynomdivision.

An dieser Stelle findet sich im Buch die I. Tafel, die fünf Beispiele zur Multiplikation von mehrgliedrigen Summen enthält.

Die *allgemeine Methode der Theilung der verwickelten Größen* (Leitsatz 48), also die allgemeine Polynomdivision, ist Gegenstand von Abschnitt 48. Auch in diesem Abschnitt wird die allgemeine Methode nicht hergeleitet, sondern nur ausführlich beschrieben. Eine *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 49) wird in Abschnitt 49 gegeben. Auf drei Seiten wird ausführlich die Division von $31aabb + 2a^4 + 24b^4 - 38ab^3 - 13a^3b$ durch $-3ab + 2aa + 4bb$ erklärt. *Ein ander Exempel* (Leitsatz 50) wird in Abschnitt 50 behandelt: $(6b^3c-b^4-9c^2b^2+4c^4):(-3cb+b^2+2c^2)$.

Anhand eines Beispiels, bei dem ein Term, der die Summe $3ac^2d^3 - c^3d^3 - 3a^2cd^3 + a^3d^3$ enthält, durch einen Term dividiert wird, der die Summe $a^2d^2 + c^2d^2 - 2acd^2$ enthält, wird in Abschnitt 51 das Problem untersucht, *was man bey Ordnung der Glieder zu beobachten hat, wenn verschiedene Buchstaben in Betrachtung kommen* (Leitsatz 51).
Bey der Auflösung der vorhergehenden Aufgaben haben wir nur eine unbekannte Größe nöthig gehabt, weil, eigentlich zu reden, in diesen Aufgaben nur eine Größe zu suchen war. Aber da man, wenn man in der Algebra weiter geht, Aufgaben findet, wo man mehrere unbekannte Größen brauchen muß, so wollen wir sehen, wie man dabey verfähret (Abschnitt 52). *Eine Aufgabe, in welcher zwo unbekannte Größen vorkommen* (Leitsatz 52), ist daher Gegenstand des weiteren Abschnitts: *Wenn die eigenthümlichen Schweren zwoer in einer Vermischung enthaltenen Materien, nebst dem Inhalte und dem Gewichte der ganzen Vermischung, gegeben sind, zu finden, wieviel von einer jeden Materie in der Vermischung enthalten ist.* Die *Anzahl der Cubiczolle ... sey ... a, ... das ganze Gewicht ... b, die Menge der ersten in der Vermischung enthaltenen Materie ... x, das Gewicht eines Cubiczolls dieser Materie ... c, die Menge der zweyten Materie sey ... y, ihre eigenthümliche Schwere sey ... d.* Mit diesen Bezeichnungen erhält man die Gleichungen $cx+dy=b$ und $x+y=a$. *Ob man nun gleich durch keine von diesen beyden Gleichungen besonders den Werth von x ohne das y finden kann, so findet man doch, wenn man sich beyder zugleich bedienet, bald ein Mittel, das y ganz bekannt zu machen. Denn weil jede von diesen beyden Gleichungen einen Werth von x giebt, so kann man diese beyden Werthe einander gleich setzen, welches die Gleichung* $\frac{b-dy}{c} = a-y$ *giebt ...* (Abschnitt 52). Der Wert $\frac{ac-b}{c-d}$, der sich daraus für y ergibt, wird in Abschnitt 53 in den Term $\frac{b-dy}{c}$ eingesetzt, wodurch das erhaltene Ergebnis verifiziert wird.

Innerhalb dieses Abschnitts findet sich die II. Tafel, die fünf Beispiele zur Polynomdivision enthält.

Eine *Anwendung der vorhergehenden Auflösung auf ein Exempel* (Leitsatz 54), nämlich auf eine Mischung aus Gold und Silber, behandelt Abschnitt 54.

Man entdecket leicht aus dem, was man in der vorhergehenden Aufgabe gesehen hat, daß man allemal, wenn man zwo unbekannte Größen in einer Frage gebraucht hat, zwo Gleichungen haben muß, um dieselben abzusondern, und daß man, wenn man in einer Aufgabe nach zwoen Größen fragt, auch zwo Bedingungen angeben muß, um sie zu bestimmen, damit man durch diese beyden Bedingungen die beyden nöthigen Gleichungen bekommen könne (Abschnitt 55).

Eine andere Aufgabe, in welcher zwo unbekannte Größen vorkommen (Leitsatz 56), ist Gegenstand von Abschnitt 56: *zwo Quellen, deren jede immer gleich stark fließt, haben miteinander ein Wasserbehältniß a gefüllet, da die erste eine Zeit b, die andere eine Zeit c, geflossen. Eben diese beyden Quellen haben ein ander Wasserbehältniß d zusammen gefüllet, da die erste eine Zeit e, und die andere eine Zeit f geflossen. Man fragt, wie viel Wasser jede Quelle gegeben hat?* Nachdem diese Aufgabe allgemein gelöst ist, bringt Abschnitt 57 ein *Exempel der vorhergehenden Aufgabe in Zahlen* (Leitsatz 57), wo die gegebenen Zahlen nur in die allgemeine Lösung eingesetzt werden. Und *ein ander Exempel* (Leitsatz 58), ebenfalls in Zahlen, ist Gegenstand von Abschnitt 58. *Etwas besonderes in den Ausdrücken, zu welchen man in diesem Exempel gelanget* (Leitsatz 58, zweiter Teil), ist, daß sich die Werte der Unbekannten als $\frac{300}{-10}$ und $\frac{-400}{-10}$ ergeben, wohingegen sie sich beim ersten Zahlenbeispiel als $\frac{210}{7}$ und $\frac{315}{7}$ ergaben. *Wie man erfahren kann, was sie bedeuten* (Leitsatz 58, dritter Teil), wird daher im Rest des Abschnitts 58 untersucht. Mit Hilfe der allgemeinen Gleichungen, in die bereits die speziellen Zahlenwerte eingesetzt werden, ergeben sich nach dem Gleichsetzungsverfahren die Lösungen -30 und 40. *Auf diese Art wird man gesehen haben, ohne daran zweifeln zu können, daß +40 der Quotient von -400 durch -10, und -30 der Quotient von*

+300 durch -10 ist (Abschnitt 58). *Man wird hierauf gar bald folgende Regeln für allgemeine Grundregeln angenommen haben, daß + durch + getheilt + giebt, daß + durch - getheilt - giebt, daß - durch + getheilt - giebt, und daß - durch - getheilt + giebt; und so auch bey der Vermehrung* (Abschnitt 59). Wurden diese Regeln in Abschnitt 58 nur an einem Zahlenbeispiel hergeleitet, so beschäftigt sich Abschnitt 60 nun mit einem allgemeinen Beweis: *Es wird bewiesen, daß -b durch -d, +bd giebt, obgleich nichts vor diesen Größen vorhergeht* (Leitsatz 60). Dies geschieht mit Hilfe des Produkts (a-b)(c-d), in dem a und c gleich Null gesetzt werden. *Die übrigen Fälle werden auf eben diese Art bewiesen* (Leitsatz 61).

Wie der gefundene negative Werth die Aufgabe auflöset (Leitsatz 62), wird in Abschnitt 62 gezeigt. Daß er die mathematischen Gleichungen erfüllt, ist leicht einzusehen, daß er auch eine Lösung der konkreten Aufgabe ist, verlangt schon die Interpretation, daß *man in diesem Fall die erste Quelle so betrachten* (muß), *als ob sie den Wasserbehältnissen Wasser nähme, anstatt ihnen welches zu geben ...* (Abschnitt 62). Leitsatz 63 drückt dies allgemein so aus: *Wenn die unbekannten Größen negativ werden, so muß man sie in einer Bedeutung nehmen, welche ihrer Bedeutung in der Ausdrückung der Aufgabe entgegen gesetzt ist. Eben so verhält es sich mit den bekannten Größen. ... Ein Exempel von dem Gebrauche der bekannten negativ genommenen Größen* (Leitsatz 64), nämlich wiederum das der Quelle, die dem Behälter Wasser entnimmt, behandelt Abschnitt 64. *Ein ander Exempel von eben demselben Gebrauche der bekannten negativ genommenen Größen* (Leitsatz 65) geht auf die Aufgabe der Boten (vgl. S. 70) zurück. Im damaligen Beispiel entfernte sich der erste Bote vom zweiten, hier kommt er dem zweiten entgegen.

Ein Nutzen der Algebra, welcher sich so weit erstrecket, und welcher am besten den Vortheil zeigt, den man davon hat, wenn man, wie wir itzo gethan haben, die Zeichen der allgemeinen gegebenen Größen in den Aufgaben nach Belieben an-

nimmt, ist unter andern dieser, daß man durch die Auflösung einer allgemeinen angenommenen Gleichung zugleich die Auflösungen aller derjenigen Gleichungen bekömmt, in welchen nur die unbekannten Größen eben so geordnet sind, ihre Zeichen und Coefficienten mögen übrigens seyn, wie sie wollen (Abschnitt 66). Es folgt in diesem und in den Abschnitten 67 und 68 die Auflösung der Gleichungssysteme $mnx = ppy - bbg$ und $mny = p^3 - nnx$ sowie $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2nq}{p-q}$ und $mx + (p+q)y = \frac{qn}{p-q}$, ohne daß diese Gleichungssysteme noch durch Aufgaben motivert sind. In Abschnitt 67 wird das zweite Gleichungssystem so gelöst, indem die Gleichungen sofort auf die Form $bx + cy = a$ bzw. $ex + fy = d$ der allgemeinen Lösung der Aufgabe von Abschnitt 56 gebracht werden, und entsprechende Koeffizienten in die damalige allgemeine Lösung eingesetzt werden, was dann als Wert für x

$$x = \frac{-\frac{pp}{p+q}\cdot\frac{qn}{p-q} + \frac{2nq}{p-q}\cdot(p+q)}{-\frac{pp}{p+q}\cdot m - \frac{3mp}{p-q}\cdot(p+q)}$$

liefert. Der Wert für y ist ähnlich kompliziert. Auf weiteren zwei Seiten werden diese Größen noch vereinfacht, was für x den Wert $\frac{-nqpp-4npqq-2nq^3}{4mp^3+5mp^2q+3mpqq}$ ergibt.

Wenn man den Anfang zur Auflösung der in diesem Exempel vorgegebenen Gleichungen damit gemacht hätte, daß man die Brüche aus diesen Gleichungen weggeschafft hätte, so würde die auf folgende Art angestellte Rechnung wegen der Theiler nicht so mühsam gewesen seyn (Abschnitt 68), denn ziemlich schnell ergeben sich die Gleichungen $(3mpp+3mpq)x + (ppq-p^3)y = -2npq - 2nqq$ und $(mp-mq)x + (pp-qq)y = qn$. Setzt man die Koeffizienten dieser Gleichungen in die allgemeine Lösung ein, so ergibt sich für y derselbe Wert wie im vorigen Abschnitt, nur mit m erweitert, während sich für x

$\frac{qnp^3+3ppqqn-2npq^3-2nq^4}{2mp^2q^2-4mp^4-mp^3q+3mpq^3}$ ergibt. Eine *Vergleichung der beyden vorhergehenden Auflösungen mit einander* (Leitsatz 69) ergibt, daß der zweite x-Wert mit p-q erweitert ist. Abschnitt 70 begründet, ausgehend von den zwei verschiedenen x-Werten

des eben gelösten Problems, die Notwendigkeit, den größten gemeinsamen Teiler zweier Ausdrücke bzw. Zahlen zu finden. Am Beispiel der Zahlen 637 und 143 wird der Euklidische Algorithmus vorgeführt: *Wenn man nun erstlich 637 durch 143 theilet, so kömmt 4 zum Quotienten heraus, und 65 ist der Rest, das ist, der Bruch* $\frac{637}{143}$ *wird in* $4 + \frac{65}{143}$ *verwandelt; daher es denn nunmehr nur darauf ankömmt, daß man den Bruch* $\frac{65}{143}$ *auf das kürzeste ausdrücke, oder, welches einerley ist, daß man eine Zahl suche, welche der größte gemeine Theiler der Zahlen 143 und 65 sey. Denn es ist klar, daß, wenn diese Zahl gefunden ist, sie auch der größte gemeine Theiler der Zahlen 637 und 143 seyn muß; weil man den Bruch* $\frac{65}{143}$ *nicht auf seinen kürzesten Ausdruck bringen kann, ohne zugleich* $4 + \frac{65}{143}$ *oder* $\frac{637}{143}$ *auf seinen kürzesten Ausdruck zu bringen.*

Da die beyden Zahlen 143 und 65, an welche wir uns itzo machen wollen, einfacher sind, als die beyden erstern, 637 und 143, so sehe ich, daß die Schwierigkeit vermindert ist, und daß, wenn man wieder so wie vorhin verfährt, man sie noch mehr vermindern wird. Anstatt des abzukürzenden Bruches $\frac{65}{143}$ *schreibe ich* $\frac{143}{65}$*, nicht, weil ich etwan diese Brüche für einerley hielte, sondern, weil man den einen nicht abkürzen kann, daß nicht der andere auf eben diese Art abgekürzet würde* (Abschnitt 70). Entsprechend behandelt Abschnitt 71 den allgemeinen Euklidischen Algorithmus als *allgemeine Methode, den größten gemeinen Theiler zwoer Zahlen zu finden* (Leitsatz 71).

Nun wollen wir sehen, was für Veränderungen man bey dieser Methode vornehmen muß, damit sie sich bey den algebraischen Größen anwenden lasse (Abschnitt 72). Das wird in diesem Abschnitt am Beispiel $(3a^3-3baa+bba-b^3):(4aa-5ba+bb)$ ausführlich vorgeführt. Im nächsten Abschnitt 73 folgt dann die *allgemeine Methode, den größten gemeinen Theiler algebraischer Größen zu finden* (Leitsatz 73). Dabei ist insbesondere zu beachten, *daß jegliche zwo Größen A und B ihren größten gemeinen Theiler behalten, wenn man eine von diesen beyden Größen, z.E. A, durch eine Größe, welche keinen*

Theiler mit B gemein hat, vermehret oder theilet. Nach der allgemeinen Methode folgen als *erstes Exempel* (Leitsatz 74) $(qnp^3+3np^2q^2-2npq^3-2nq^4):(2mp^2q^2-4mp^4-mp^3q+3mpq^3)$, als *zweytes Exempel* (Leitsatz 75) $(ab+2aa-3bb-4bc-ac-cc):(9ac+2aa-5ab+4cc+8bc-12bb)$ und als *drittes Exempel* (Leitsatz 76) $((dd-cc)a^2+c^4-ddcc):(4da^2-(2cc+4d)a+2c^3)$. *Eine andere Art, eben dieses Exempel aufzulösen* (Leitsatz 77), behandelt Abschnitt 77, denn *übrigens entdecket man, wenn man nur eine geringe Fertigkeit im Rechnen besitzet, oft den größten gemeinen Theiler zwoer Größen leichter, als man ihn durch die itzt erklärte allgemeine Methode findet.* Ordnet man nämlich die Terme des dritten Beispiels nach dem Buchstaben d, so sieht man, daß der erste Term durch a^2-c^2, der zweite durch c-a teilbar ist.

Andere Größen, deren größter gemeiner Theiler, ohne die vorhergehende Methode, gefunden wird (Leitsatz 78), behandelt Abschnitt 78. Das Beispiel $(6a^5+15a^4b-4a^3cc-10aabcc):(9a^3b-27aabc-6abcc+18bc^3)$ wird zunächst in den bezüglich des größten gemeinsamen Teilers invarianten Term $(6a^3+15a^2b-4acc-10bcc):(3a^3-9aac-2acc+6c^3)$ übergeführt. *Aber da die zweyte von diesen beyden Größen kein b in sich hat, so schließe ich, daß, wenn sie einen Theiler mit der ersten gemein hat, sie ihn mit jeden ihrer beyden Theile $6a^3-4acc$ und $15a^2b-10bcc$ gemein haben muß, und auch diese beyden Theile zusammen eben denselben gemeinen Theiler haben müssen. Man sieht aber sogleich, daß $3aa-2cc$ der gemeine Theiler dieser beyden Theile ist; folglich ist es der größte gemeine Theiler der vorgegebenen Größen, woferne sie einen haben. Wenn man nun diese beyden Größen damit theilet, so sieht man, daß es sie wirklich theilet, und daß es folglich ihr größter gemeiner Theiler ist* (Abschnitt 78).

Der bis hierhin behandelte Problemkreis des größten gemeinsamen Teilers illustriert die eingangs erwähnte heuristische Strategie, von konkreten Problemen ausgehend durch sukzessive Verallgemeinerung allgemeine Lösungen zu finden, diese wiederum zu problematisieren und die neu auftretenden

Probleme an einfachen Spezialfällen zu untersuchen. Denn nachdem sich bei der allgemeinen Lösung eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten in den Abschnitten 67 und 68 auf verschiedenen Lösungswegen zwei äußerlich unterschiedliche Lösungspaare ergeben hatten, die sich dadurch unterschieden, daß einige Werte noch nicht ausgekürzt waren, stellte sich das Problem, den größten gemeinsamen Teiler zweier Ausdrücke bzw. Zahlen zu finden. Die an einem Zahlenbeispiel in Abschnitt 70 gewonnenen Erkenntnisse und angewendeten Methoden wurden nun in den folgenden Abschnitten durch fortschreitende Verallgemeinerung auf das analoge Problem mit algebraischen Größen übertragen und modifiziert bzw. analogisiert. Nachdem so die *allgemeine Methode, den größten gemeinen Theiler algebraischer Größen zu finden* (Leitsatz 73), gefunden war, beschrieb Abschnitt 77, daß man, *wenn man nur eine geringe Fertigkeit im Rechnen besitzet, oft den größten gemeinen Theiler zwoer Größen leichter* (findet), *als man ihn durch die itzt erklärte allgemeine Methode findet.* Damit tauchte das Problem auf, für welche anderen Größen man den größten gemeinsamen Teiler ohne die entwickelte Methode finden kann.

Die letzten Abschnitte 79 bis 83 des ersten Teils beschäftigen sich mit der Auflösung eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten. *Wenn drey unbekannte Größen in einer Aufgabe sind, so muß man drey Gleichungen haben, um dieselbe aufzulösen* (Leitsatz 79), denn wenn zur Bestimmung von zwei Unbekannten zwei Gleichungen notwendig sind, *kann man sich leicht vorstellen, daß, wenn drey unbekannte Größen in einer Aufgabe sind, man drey Gleichungen haben müsse, und so ferner* (Abschnitt 79). Ebenfalls analog zum Problem mit zwei Unbekannten wird erklärt, *wie man die unbekannten Größen in diesen Gleichungen absondert* (Leitsatz 79, 2. Teil). *Eine Aufgabe, in welcher drey unbekannte Größen vorkommen* (Leitsatz 80), behandelt Abschnitt 80: *Man weis, wieviel drey Magazine, da in jedem dreyerley Arten Getreyde sind, jedes besonders, gekostet haben. Man weis ferner, wieviel Maaß von jeder dieser dreyerley Arten Getreyde in*

jedem Magazine sind; und man fragt, wieviel ein Maaß von jedem Getreyde kostet?
Es seyn a, b, c, die Zahlen der Maaße jeder Art des Getreydes, welches in dem ersten Magazine enthalten ist, und d sey der Preis dieses Magazins.
Es seyn ferner e, f, g, die Maaße eben dieser Getreydearten, welche in dem zweyten Magazine enthalten sind, und der Preis desselben sey h.
Es seyn noch ferner i, k, l, die Maaße eben dieser Getreydearten, welche in dem dritten Magazine enthalten sind, und der Preis dieses Magazins sey m.
Es seyn endlich x, y, z, die Preise eines Maaßes von einer jeden Art.
Nach einiger Rechnung erhält man für z die beiden Werte $z = \frac{de-ah+afy-bey}{ce-ag}$ und $z = \frac{di-am+aky-biy}{ci-al}$. Da die Berechnung von y *gar weitläuftig seyn* würde, *so will ich zeigen, wie man sie vermeiden kann, indem man sich gewisser Abkürzungen bedienet, auf welche die ersten Analysten, wenn sie große Rechnungen zu machen gehabt haben, leicht haben fallen können.* Dies geschieht in Abschnitt 81, indem de-ah durch α, af-be durch β, ce-ag durch γ, di-am durch δ, ak-bi durch ε und ci-al durch ϕ ausgedrückt werden. Die beiden oben genannten Gleichungen vereinfachen sich dann zu $z = \frac{\alpha+\beta y}{\gamma}$ und $z = \frac{\delta+\varepsilon y}{\phi}$.
Entsprechend dem Aufbau des ganzen Werks behandelt der nächste Abschnitt 82 ein *Exempel der vorhergehenden Aufgabe in Zahlen* (Leitsatz 82), in dem einfach für a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l und m Zahlen eingesetzt werden, mit denen sich wiederum Zahlenwerte für α, β, γ, δ, ε und ϕ ergeben. Diese werden dann in die allgemeine Lösung des vorigen Abschnitts eingesetzt. Der letzte Abschnitt des ersten Teils schließt das Problem der Lösung eines Gleichungssystems mit drei Unbekannten ab: *Alle Aufgaben vom ersten Grade mit drey unbekannten Größen, können, wenn sie in Gleichungen gebracht werden, in der vorhergehenden Aufgabe begriffen werden* (Leitsatz 83), was an einem abschließenden Beispiel gezeigt wird.

1.3...3 *Zweyter Theil. Von der Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade.*

Abschnitt 1 behandelt *eine Aufgabe, welche bey ihrer Allgemeinheit Aufgaben von allen Graden in sich hält* (Leitsatz 1): *Es hat einer eine Summe a in einer Handlung angelegt, worinnen er verliert. Er will gleich im ersten Jahr wieder heraustreten: da er aber die Gelegenheit dazu versäumet hat, und eher keine wieder finden kann, als im zweyten oder dritten, oder überhaupt im nten Jahre, so findet er, daß die Summe um die Größe b kleiner geworden ist, als sie nach dem ersten Jahre war. Man fragt, wieviel von hunderten er jährlich verloren hat?* Mit Hilfe einer Proportion wird hergeleitet, daß nach dem n-ten Jahr die Höhe der Einlage sich zu $a(1-\frac{x}{100})^n$ berechnet. Die *Gleichung der vorhergehenden Aufgabe für den Fall des zweyten Grades* (Leitsatz 2) behandelt Abschnitt 2. Es ergibt sich die Gleichung $x^2-100x = -10000\frac{b}{a}$, *eine Gleichung vom zweyten Grade, zu deren Auflösung man durch die vorhergehenden Methoden nicht gelangen kann* (Abschnitt 2). Die analogen Gleichungen *für den dritten Grad* (Leitsatz 3) und *für den Grad n* (Leitsatz 4) sind Gegenstände der Abschnitte 3 und 4: $x^3-300x^2+20000x = +1000000\frac{b}{a}$ und $(1-\frac{x}{100})^n = 1-\frac{x}{100}-\frac{b}{a}$.

Wie man zu der allgemeinen Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade gelanget (Leitsatz 5), behandelt Abschnitt 5. *Wer Fälle von höhern Graden eben dieser Aufgabe auflösen will, der wird es leicht thun können, sobald er aus den folgenden die allgemeinen Methoden, die den Graden, auf welche diese Gleichungen steigen, zukommen, wird ersehen haben.*

Wenn man eine Methode, die Gleichungen vom zweyten Grade allgemein aufzulösen, suchet, so ist das natürlichste, darauf man fallen kann, daß man untersuche, was diese Gleichungen mit den Gleichungen vom ersten Grade für eine Verbindung haben. Nun ist aber klar, daß eine jede Glei-

chung vom ersten Grade zu einer Gleichung vom zweyten Grade wird, wenn man die beyden Glieder derselben quadriret. Z.E. aus x+a = b wird, wenn man es quadriret, $x^2+2ax+a^2 = b^2$. *Man muß also sehen, ob man, durch eine entgegengesetzte Verrichtung, eine jede Gleichung vom zweyten Grade auf eine Gleichung vom ersten Grade bringen kann* (Abschnitt 5).

Dieser Ansatz führt zur bekannten Lösung $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, *... und dieser Werth kann auch für eine jede gegebene Gleichung genommen werden, sobald man aus der Vergleichung dieser Gleichung mit xx+px = q die besondern Werthe von p und von q bestimmet hat* (Abschnitt 5).

Durch einfache verallgemeinernde Analogie ist also das Problem, die Gleichungen zweiten Grades aufzulösen, in einfachster Weise auf die Lösung der Gleichungen ersten Grades zurückgeführt.

Abschnitt 6 erinnert an den im ersten Teil, Abschnitt 60, gefundenen Grundsatz, *daß, aus einer negativen Größe, durch eine negative Größe vermehret, ... eine positive Größe herauskömmt ...*, und zieht daraus zwei Folgerungen: *Die Quadratwurzel einer Größe ist so wohl negativ, als positiv,* und damit: *Eine Gleichung vom zweyten Grade hat zwo Wurzeln, das ist, zween Werthe von x* (Leitsätze 6). Die bekannte *Formel, welche diese beyden Wurzeln in sich hält* (Leitsatz 7), nennt Abschnitt 7.
Eine *Anwendung der vorhergehenden Formel bey der Gleichung im II. §.* (Leitsatz 8) ergibt $p = -100$ und $q = -10000\frac{b}{a}$ und damit $x = 50 \pm \sqrt{2500-10000\frac{b}{a}}$. Mit der *Abkürzung des Werths von x durch Formirung der Wurzel des Products aus den Wurzeln derer Größen, welche durch einander vermehret werden,* beschreibt Leitsatz 9 nichts anderes als die Faktorisierung des Radikanden und die faktorenweise Ausziehung der Quadratwurzeln, was hier zu $x = 50\pm50\sqrt{1-\frac{4b}{a}}$ führt.
Die folgenden Abschnitte befassen sich mit einigen *Exempeln*. In Abschnitt 10 wird als *Exempel von dieser Aufgabe* (Leitsatz 10) gesetzt, *b sey* $\frac{6}{25}$ *von a*, woraus sich durch Einsetzen dieses Werts in die allgemeine Lösung *x=60, oder*

x=40 ergibt. *Ein ander Exempel,* völlig äquivalent zum ersten, behandelt Abschnitt 11. Das Problem der imaginären Wurzeln behandelt Abschnitt 12: *Drittes Exempel, welches, weil es die Wurzel einer negativen Größe erfordert, unmöglich ist* (Leitsatz 12). Denn mit $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ ergibt sich $x = 50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$. *Diese Wurzeln werden unmögliche Wurzeln (radices imaginariae) genennet* (Leitsatz 12, 2. Teil). Abschnitt 13 sagt, *welches die Gleichungen vom zweyten Grade sind, derer Wurzeln unmöglich sind* (Leitsatz 13), wenn nämlich *die durch q bezeichnete Größe negativ und größer ist, als* $\frac{1}{4}pp$ ...

Die Einführung der imaginären Zahlen ist ein weiteres Beispiel für die Anwendung der anfangs erwähnten heuristischen Strategie, bei der Anwendung allgemeiner Lösungsschemata auf kompliziertere Beispiele neue Probleme zu generieren. Denn nachdem zwei Beispiele sich problemlos mit der entwickelten Lösungsmethode behandeln ließen, ergibt sich im dritten Beispiel ein negativer Radikand. Damit ist die Motivation geschaffen, sich mit den imaginären Zahlen zu befassen und ein Kriterium zu suchen, das es ermöglicht, sofort festzustellen, ob eine Gleichung vom zweiten Grade reelle oder imaginäre Lösungen hat.

Die Methode der quadratischen Ergänzung bei konkreten Gleichungen vom zweiten Grad behandelt Abschnitt 14 als *Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade, ohne sie mit der allgemeinen Formel zu vergleichen* (Leitsatz 14). *Die Anfänger zu den Schwierigkeiten anzugewöhnen, welche man in den Aufgaben vom zweyten Grade antrifft, wollen wir ihnen noch folgende Aufgabe vorlegen.*
In der geraden Linie zwischen zweyen Lichtern denjenigen Punct zu finden, wo diese beyden Lichter gleich stark leuchten; wobey man diesen physikalischen Grundsatz voraussetzet, daß die Wirkung eines Lichtes viermal größer ist, wenn es zweymal näher ist, daß die Wirkung neunmal größer ist, wenn das Licht dreymal näher ist; oder, mathematisch zu reden, daß die Wirkung des Lichtes sich umgekehrt verhält, wie das Quadrat der Entfernung (Abschnitt 15). Nach

ausführlicher Rechnung ergeben sich zwei Werte, von denen in Abschnitt 16 gezeigt wird, daß sie verschiedene Vorzeichen haben: *Von den beyden vorhergehenden Werthen ist nothwendig der eine positiv, der andere negativ* (Leitsatz 16). Den *Gebrauch des negativen Werthes* (Leitsatz 12) erklärt Abschnitt 12 analog zu Abschnitt 63 des ersten Teils, wo gesagt wurde, daß ein negativer Wert *in dem der ersten Bedeutung entgegengesetzten Verstande genommen werden muß*, was bei dieser speziellen Aufgabe bedeutet, daß der Punkt, *anstatt zwischen den beyden Lichtern zu liegen, in der Verlängerung der Linie seyn* muß. *Damit man uns desto besser verstehe, so wollen wir die ganze Aufgabe wieder vornehmen, und voraussetzen, der gesuchte Punct sey in der Verlängerung der zwischen beyden Lichtern gezogenen geraden Linie* (Abschnitt 18). Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich wieder zwei Lösungen mit unterschiedlichen Vorzeichen, nur entspricht der Punkt auf der Verlängerung dieses Mal der positiven Lösung. *Wir werden hoffentlich den Lesern aus allem Zweifel, bey dieser Aufgabe, helfen, wenn wir die Sache mit einem Exempel erläutern. Wir wollen setzen n=4m ...* (Abschnitt 19).

Abschnitt 20 bringt *neue Exempel, von Auflösungen der Gleichungen vom zweyten Grade* (Leitsatz 20). Ohne die Gleichungen noch durch Aufgaben zu motivieren, heißt es nur noch: *Es sey* $bxx = 2c^2x+2cca$, *... es sey* $ff+gg-2gx+xx = \frac{mmxx}{nn}$, *... es sey* $abc-aff+2afz = azz-bzz$, und *es sey* $4a^2-2x^2+2ax = 18ab-18bb$. Die Lösung der letzten Gleichung ergibt $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}aa-9ba+9bb}$, was zu dem Problem führt, die Quadratwurzel aus einem vollständigen Quadrat zu ziehen. In Abschnitt 21 wird daher *die Art, wie man die Quadratwurzeln ausziehet, ... mit einem Exempel erläutert* (Leitsatz 21), nämlich am Beispiel $30ab + 9bb + 25a^2$. *Andere Exempel von Ausziehung der Quadratwurzel* (Leitsatz 22) festigen *die Anfänger in der Methode, die Quadratwurzeln auszuziehen.*

Zur Faktorisierung des Radikanden als *wirklich die schwerste*

unter denjenigen Verrichtungen, welche man bey Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade vornehmen muß, kehrt Abschnitt 23 zurück. Es folgen in diesem Abschnitt daher vier *Exempel von Abkürzung der Wurzelgrössen* (Leitsatz 23). Da hierbei die Quadratwurzeln nicht immer vollständig ausziehbar sind, behandelt Abschnitt 24 die irrationalen Größen: *Die Größen, welche keine vollkommene Wurzeln haben, werden incommensurable Größen, oder Irrationalgrößen genennet,* sowie ihre Addition und Subtraktion: *Die Zusetzung und Abziehung dieser Größen setzet nichts, als ihre Abkürzung voraus* (Leitsätze 24).

An dieser Stelle befindet sich die III. Tafel, die drei Beispiele der Zerlegung in vollständige Quadrate enthält.

Mit der *Vermehrung der Irrationalgrößen* (Leitsatz 25) befaßt sich Abschnitt 25, mit der *Theilung der Irrationalgrößen* Abschnitt 26.

Was itzo von den Gleichungen vom zweyten Grade gesagt worden, ist hinlänglich, wenn diese Gleichungen nur eine unbekannte Größe in sich enthalten. Da man aber oft Aufgaben antrifft, in welchen man mehrere unbekannte Größen braucht; so müssen wir sehen, wie man mit diesen Aufgaben verfährt (Abschnitt 27). Es folgt daher *eine Aufgabe vom zweyten Grade mit mehr als einer unbekannten Größe* (Leitsatz 27): *Drey Größen zu finden, welche in geometrischer Progression sind, und derer Summe nebst der Summe ihrer Quadrate gegeben ist. Es seyn die drey gesuchten Größen x, y, z; so bekömmt man, vermöge der Natur der Progressionen, x:y = y:z, das ist yy = xz. Ferner, weil ihre Summe gegeben ist, so bekömmt man, wenn man diese Summe a nennet, x+y+z = a. Endlich, wenn man die Summe ihrer Quadrate bb nennet, so bekömmt man, vermöge der letzten Bedingungen der Aufgabe, xx+yy+zz = bb.* Diese Gleichungen führen nach etwa zweiseitiger Rechnung zu den Werten von x, y und z, wobei sich insbesondere für y der Wert $\frac{aa-bb}{2a}$ ergibt. *Weil man in dieser Auflösung auf einen sehr einfachen Werth von y gekommen ist, da man doch vorher ziemlich zusammengesetzte Wurzelgrößen gehabt; so läßt sich vermuthen, daß man durch einen*

kürzern Weg dazu gelangen könnte (Abschnitt 28). *Eine andere Art, die vorhergehenden Gleichungen aufzulösen* (Leitsatz 28), besteht nämlich darin, die eben aufgetretenen Gleichungen $x^2-ax+yx = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} - y^2+ay$ und $x^2+xy-ax = -yy$ voneinander abzuziehen.

Ein Exempel einer Gleichung vom zweyten Grade mit zwey unbekannten Größen, welches noch verwickelter ist, als das vorhergehende (Leitsatz 29), behandelt Abschnitt 29: $x^2+ax-2xy = aa+2yy$ und $xx-2ax+xy = 2aa-yy$. Die beiden Gleichungen werden nach x aufgelöst und die sich daraus ergebenden Werte einander gleichgesetzt. Als *letzte Gleichung, zu welcher diese Gleichungen führen* (Leitsatz 29, 2. Teil), ergibt sich dann $9y^4+9ay^3- 30aayy+27a^3y = 11a^4$. *Man sieht hieraus, daß es mit den Gleichungen vom zweyten Grade, worinne mehr als eine unbekannte Größe ist, nicht so beschaffen ist, wie mit denen vom ersten Grade, als welche niemals eine letzte Gleichung von einem andern Grad geben, als von welchem sie selbst sind* (Abschnitt 29). Abschnitt 30 beschreibt, *wie man noch anders mit diesem Exempel verfährt* (Leitsatz 30). Beide Gleichungen werden nach x^2 aufgelöst ($x^2 = aa+2yy-ax+2xy$ und $x^2 = 2aa-yy+2ax-xy$), und diese Werte werden einander gleichgesetzt, was zu $x = \frac{3yy-aa}{3a-3y}$ führt. Als letzte Gleichung ergibt sich natürlich wieder die oben genannte Gleichung vierten Grades.

Mit Gleichungen, die *alle beyde so sehr verwickelt* (sind), *als nur die Gleichungen vom zweyten Grade mit zwoen unbekannten Größen es seyn können*, befaßt sich Abschnitt 31: $x^2+axy+bx = cy^2+dy+e$ und $x^2+fxy+gx = hy^2+iy+k$. Auch hier ergibt sich für y wieder eine Gleichung vom vierten Grad mit äußerst komplizierten Koeffizienten.

Die letzten Abschnitte 32 bis 35 des zweiten Teils befassen sich mit noch komplizierteren Gleichungen. *Wenn y zu einem jeden Grade, welcher es auch sey, x aber nur auf den zweyten Grad erhöhet wäre; so verführe man mit den beyden Gleichungen auf eben die Art* (Leitsatz 32). Nach einer Vorbemerkung, daß Gleichungen wie $xxy+axy = abb$ und $xxyy+ccyx = a^4$ eigentlich *nicht mit unter die Gleichungen vom zweyten*

Grade gerechnet werden können, weil das unbekannte Product von x^2 durch y drey Dimensionen, und das Product von x^2 durch y^2 vier Dimensionen hat (Abschnitt 32), wird gezeigt, daß man auch im allgemeinen im Leitsatz genannten Fall zunächst die quadratischen und danach die linearen x-Glieder beseitigen kann. Das analoge Problem, *was man thun muß, wenn man zu der letzten Gleichung gelangen will, in dem Falle, da x auf den dritten Grad erhöhet wäre* (Leitsatz 33), behandelt Abschnitt 33. Und die entsprechende allgemeine Aussage macht Abschnitt 34: *Eben so wäre zu verfahren, wenn x noch auf höhere Grade erhoben wäre* (Leitsatz 34). *Und wenn mehr als zwo unbekannte Größen da wären; so würde man auf eben diese Art zu der letzten Gleichung gelangen* (Leitsatz 35). Diese Aussage wird in Abschnitt 35 mit Hilfe der Überlegungen am Gleichungssystem mit zwei Unbekannten begründet.
Die in den Abschnitten 32 bis 35 genannten Lösungsmethoden werden in keinem Fall durch Beispiele erläutert.

1.3.2.4 *Dritter Theil. In welchem man einige allgemeine Grundregeln für die Gleichungen von allen Graden giebt, nebst der Methode, aus diesen Gleichungen die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade, welche sie etwan in sich haben, herzuleiten.*

Die bis jetzt untersuchten Gleichungen vom ersten und zweiten Grad führen zu der Vermutung, *daß die Gleichungen vom dritten Grade drey Wurzeln u.s.f. haben müßten: und, um sich von dieser Wahrheit zu versichern, oder vielmehr, um zu begreifen, wie eine Gleichung eben so viele Wurzeln haben kann, als sie Grade hat, so hat man das Umgekehrte von der anfangs vorgenommenen Aufgabe gesucht; das ist, anstatt die Wurzeln einer Gleichung zu suchen, hat man gesucht, was das für eine Gleichung seyn würde, deren Wurzeln gegebene Größen wären; eine Aufgabe, die unendlich leichter ist als jene* (Vorbemerkung zum dritten Teil).

So beschäftigt sich Abschnitt 1 anhand eines konkreten Problems mit drei zahlenmäßig gegebenen Wurzeln damit, *wie man eine Gleichung vermittelst ihrer Wurzeln macht* (Leitsatz 1). Abschnitt 2 behandelt das entsprechende allgemeine Problem mit den Wurzeln a, b, c, d und e. Leitsatz 2: *Eine Gleichung hat eben so viel Wurzeln als Grade.* Aus dem allgemeinen Beispiel von Abschnitt 2 folgert Abschnitt 3 eine *Eigenschaft der Gleichungen von allen Graden* (Leitsatz 3), nämlich:

Daß das erste Glied nichts anders ist, als die unbekannte Größe, zu der durch die Zahl der Wurzeln ausgedrückten Potenz erhoben, ohne Coefficienten:
Daß das zweyte Glied die unbekannte Größe, um einen Grad niedriger, mit einem Coefficienten, welcher der Summe der Wurzeln gleich ist, in sich hält:
Daß in dem dritten Gliede die unbekannte Größe, um zween Grade niedriger, sich befindet, nebst einem Cefficienten, welcher gleich ist der Summe aller Producte aus jeden zwoen Wurzeln:
Daß man in dem vierten Gliede ebenfalls die unbekannte Größe, um drei Grade niedriger, antrifft, mit einem Coefficienten, welcher die Summe aller Producte aus jeden drey Wurzeln ist. Eben so wird es mit den übrigen Gliedern beschaffen seyn, bis zu dem letzten, welches zwar keine Potenz von x haben, aber das Product aller Wurzeln durch einander seyn wird (Abschnitt 3). Daraus schließt Abschnitt 4: *In einer Gleichung, worinne das zweyte Glied fehlet, ist die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen Wurzeln gleich* (Leitsatz 4). Und zum Fehlen des absoluten Gliedes bemerkt Leitsatz 5: *Eine Gleichung, welche kein bekanntes Glied hat, hat wenigstens eine Wurzel gleich Null.*
Einige *Bedingungen, welche man bey einer Gleichung beobachten muß, um darinne die vorhergehenden Eigenschaften zu finden* (Leitsatz 6), nennt Abschnitt 6: die Ordnung aller Glieder auf einer Seite der Gleichung nach fallendem Grad, wobei das Glied mit dem höchsten Grad den Koeffizienten 1

haben muß usw.

Eine Methode, die commensurablen Wurzeln einer Gleichung zu bekommen (Leitsatz 7), beschreibt Abschnitt 7 am Beispiel der Gleichung $x^3-5xx+7x-3=0$, deren kommensurable Teiler *keine andern seyn können, als -1, -3, +1, +3.* Die Überprüfung erfolgt hier aber nicht durch Einsetzen des Teilers für x, sondern durch die entsprechende Polynomdivision.

Mit dem Problem, daß eine Wurzel ein Bruch sein kann, beschäftigt sich Abschnitt 8: *In einer Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind, kann die unbekannte Größe kein Bruch seyn* (Leitsatz 8). Und treten doch Brüche als Koeffizienten auf, so erhält man, wenn d das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner dieser Brüche ist, durch die Substitution $x = \frac{y}{d}$ eine *Verwandlung, durch welche man die Brüche aus einer jeden Gleichung wegbringt* (Leitsatz 9). Und *durch diese Verwandlung findet die vorhergehende Methode auch bey Gleichungen mit Brüchen statt* (Leitsatz 10).

Eine *Unbequemlichkeit der vorhergehenden Methode* (Leitsatz 11) behandelt Abschnitt 11, daß nämlich, *wenn das letzte Glied viel Theiler hat, die Rechnungen, welche man anstellen muß, um alle Theilungen, welche diese Methode vorschreibt, zu versuchen, so langweilig sind, daß man diese Methode billig würde fahren lassen, ungeachtet sie den unendlichen Vortheil hat, daß sie sich überhaupt auf Gleichungen von allen Graden erstreckt, in welchen eine oder mehrere Wurzeln commensurabel sind.* Einige konkrete *Betrachtungen, durch welche man diese Methode verbessert hat* (Leitsatz 12), führen in Abschnitt 12 zu folgenden Ergebnissen (a ist dabei Wurzel der Gleichung): *1) Daß man unter allen Theilern der Zahl, welche dadurch entstanden, daß man x = +1 in der Größe gesetzet, die Zahl 1+a finden müsse, weil x+a der gesuchte Theiler war.*
2) Daß unter allen Theilern, welche man bekömmt, wenn man x = 0 setzet, und welche nichts anders sind, als die Theiler des letzten Gliedes der vorgegebenen Größe, die Zahl

a seyn müsse.
3) Daß unter allen Theilern der Zahl, welche man bekömmt, wenn man x = -1 setzt, die Zahl -1+a seyn müsse.
Daraus schließt Abschnitt 13 als *Grundsatz zu Findung der commensurablen Wurzeln* (Leitsatz 13), *daß von allen Theilern der Zahl, welche man bekömmt, wenn man x = 0 setzet, keine die verlangte Zahl a seyn kann, wenn er nicht zugleich um Eins kleiner ist, als einer von den Theilern der Zahl, welche man bekömmt, wenn man x = 1 setzet, und um Eins größer ist, als einer von den Theilern der Zahl, welche man bekommen hat, da man x = -1 gesetzet hat.* Diese Methode der arithmetischen Progressionen läßt sich fortführen, indem x = 2 gesetzt wird usw.

Eine *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 14) bringt Abschnitt 14. Das Beispiel $x^3-2x^2-13x+6 = 0$ wird auf über vier Seiten ausführlich behandelt.

Abschnitt 15 begründet die Notwendigkeit, daß man bei Zahlen, die viele Teiler haben, diese *mit einer gewissen Ordnung suchen* muß. In Abschnitt 16 wird daher am Beispiel der Zahl 120 gezeigt, *wie man alle Theiler einer Zahl bekömmt.* Diese systematische Bestimmung der Teiler nützt aus, daß zu jedem Teiler einer Zahl ein Komplementärteiler gehört.

Als *ein ander Exempel von der Methode, die commensurablen Wurzeln zu finden* (Leitsatz 17), behandelt Abschnitt 17 die Gleichung $x^5-12x^4+5x^3-61x^2+22x-120 = 0$. Und als *dritte Anwendung der Methode, die commensurablen Wurzeln zu finden* (Leitsatz 18), befaßt sich Abschnitt 18 mit der Gleichung $x^6-4x^5+3x^4-12x^3-5x^2+11x+36 = 0$.

Nachdem man gesehen, wie man aus den Gleichungen von einem jeglichen Grade die commensurablen Gleichungen vom ersten Grade, welche Wurzeln derselben sind, ziehen kann, so war es natürlich, daß man sich auch bemühte, die Gleichungen vom zweyten Grade, welche etwan darinne stecken möchten, herauszuziehen (Abschnitt 19). Abschnitt 19 behandelt daher die *Methode, die in einer gegebenen Gleichung befindlichen*

commensurablen Gleichungen vom zweyten Grade zu finden (Leitsatz 19). Das Verfahren ist analog der Methode, die Linearteiler zu finden, nur daß hier, wenn der Teiler x^2+bx+c gesucht wird, die Glieder der arithmetischen Progression sich nicht mehr um 1 unterscheiden, sondern um c. Die *Anwendung der vorhergehenden Methode* (Leitsatz 20) auf die *Größe* $x^5+3x^4+2x^3+8x^2-36x+21$ geschieht auf über fünf Seiten in Abschnitt 20. Innerhalb dieses Abschnitts befindet sich die IV. Tafel, die dieses und die vorhergehenden Beispiele der Abspaltung von Linearfaktoren enthält.
Eine weitere Anwendung der vorhergehenden Methode (Leitsatz 21) auf die *Größe* $x^4+6x^3+11x^2+10x+5$ bringt Abschnitt 21.

Mit der *Methode, die Theiler von einer Dimension zu finden, wenn das x einen Coefficienten hat* (Leitsatz 22), befaßt sich Abschnitt 22. Dieses Problem ließe sich auch mit der in Abschnitt 19 beschriebenen Substitutionsmethode lösen, hier wird das Problem aber von neuem gelöst, indem untersucht wird, *wie es mit den Theilern von einer Dimension beschaffen ist*, d.h. mit Teilern der Form mx+a. Analog zu der vorhergehenden Methode ergibt sich dann eine arithmetische Progression, bei der die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder gleich m ist. Eine *Anwendung dieser Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 23), nämlich auf die *Größe* $6x^4-x^3-21x^2+3x+20$, bringt Abschnitt 23. Die Methode führt hier zur Abspaltung des Faktors 3x+4.
Abschnitt 24 untersucht die *Methode, die Theiler von zwo Dimensionen zu finden, wenn das* x^2 *einen Coefficienten hat* (Leitsatz 24). Auch diese Methode ist völlig analog zur entsprechenden Methode von Abschnitt 19.
Als *Anwendung dieser Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 25) betrachtet Abschnitt 25 das Polynom $4x^5+16x^4-22x^3-14x^2-56x+77$. Die Anwendung der Methode führt zur Abspaltung von $2x^2+8x-11$.
An dieser Stelle findet sich die V. Tafel, die die drei zuletzt behandelten Beispiele noch einmal gesondert aufführt.

Um die Abschätzung des Grades der Teilpolynome geht es in den Abschnitten 26 und 27. Leitsatz 26 macht eine Aussage

für die Polynome von höchstens fünftem Grad: *Wenn eine Größe von weniger als sechs Dimensionen Theiler hat, so muß sie welche von weniger als drey Dimensionen haben.* Und Leitsatz 26 macht eine Aussage über die Polynome von mindestens sechstem Grad: *Wenn die Größe sechs oder mehr Dimensionen hat, so kann es seyn, daß sie keine andern Theiler hat, als solche, welche drey oder mehr Dimensionen haben.*

Alles, was wir bisher von den commensurablen Theilern gesagt haben, geht nur die Gleichungen mit Zahlen an. Da aber die Buchstabengleichungen auch commensurable Theiler haben können, so müssen wir auch sehen, wie man sie suchen muß (Abschnitt 28). Das Problem wird zunächst beschränkt auf *gleichartige Gleichungen (Aequatio homogenea) ..., das ist, alle ihre Glieder wären von einerley Dimension ...* mit nur einem *bekannten Buchstaben*, wie beispielsweise $x^3-ax^2-10a^2x+6a^3$. Die Lösung des Problems wird hier aber nicht vor den Augen des Lesers entwickelt, sondern es heißt einfach, man dürfe *nur Eins an die Stelle des bekannten Buchstabens a in dieser Gleichung setzen, und ihre Theiler so, wie oben, suchen. Wenn man diese Theiler gefunden hat, so setzet man, wenn sie von einer Dimension sind, wieder den Buchstaben a neben die Zahl, welche das zweyte Glied ausmacht. Wenn der Theiler zwo Dimensionen hat, so setzet man a nach dem Coefficienten des zweyten Gliedes, und aa nach der Zahl, welche das dritte Glied ausmacht* (Abschnitt 28). Diese Methode wird anschließend noch einmal an zwei Beispielen vorgeführt.

Die *Methode, alle Theiler mit zween Buchstaben einer Gleichung, in welcher drey Buchstaben sind, zu finden* (Leitsatz 29), geht aus der Überlegung hervor, daß ein Teiler einer *Größe, in welcher drey Buchstaben a, b, x, sind, ... in welchem nicht mehr als zween Buchstaben, z.E. die Buchstaben x und a, sind,* die Größe unabhängig vom Wert für b teilen muß, d.h. insbesondere auch für b = 0. Damit ist das Problem zurückgeführt auf ein Problem aus dem ersten Teil, wo in Abschnitt 73 gezeigt wurde, wie *man den größten*

gemeinen Theiler zwoer gegebenen Größen findet. Abschnitt 30 behandelt hierzu als *Exempel* (Leitsatz 30) das Polynom $x^4+ax^3+2a^2x^2+3a^3x+abbx+a^4+aabb$, Abschnitt 31 bringt *ein ander Exempel* (Leitsatz 31).

Auf die Methode aus Abschnitt 29 geht die *Methode, die Theiler mit drey Buchstaben und von einer Dimension zu finden* (Leitsatz 32), zurück. Denn soll beispielsweise ein Teiler der Form mx+na+pb gefunden werden, so geht dieser Term, indem man sukzessive a, x und b gleich 0 setzt, über in die Terme mx+pb, na+pb und mx+na. Jeder dieser Terme muß Teiler des Terms sein, der sich ergibt, wenn man in dem Ausgangsterm, dessen Teiler man sucht, entsprechend a, x und b gleich 0 setzt. Die Summe dieser Terme ist gleich dem Doppelten des gesuchten Teilers. Damit ist das Problem zurückgeführt darauf, alle *Theiler von einer Dimension mit zween Buchstaben* zu suchen. Die *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 33) geschieht in Abschnitt 33 anhand der *Größe*

$$2x^3+7ax^2-3bx^2+5a^2x-3abx+4b^2x+10abb-6b^3,$$

ein ander Exempel (Leitsatz 34),

$$8x^4-24ax^3-10bx^3-3a^2x^2-5abx^2-12ab^2x+9a^2b^2+15ab^3,$$

wird in Abschnitt 34 behandelt. Und ein *drittes Exempel, in welchem die Theiler von zween Buchstaben zugleich mit den Theilern von drey Buchstaben gefunden werden* (Leitsatz 35), bringt Abschnitt 35:

$$16x^3+16bxx-48axx+35aax-16abx-6a^3+3a^2b.$$

An dieser Stelle des Buchs befindet sich die VI. Tafel, die die letzten drei Beispiele noch einmal in übersichtlicher Form enthält.

In Abschnitt 36 wird die *Methode, die Theiler von zwo Dimensionen und mit drey Buchstaben zu finden* (Leitsatz 36), analog zu dem eben gelösten Problem, auf die entsprechende Methode für *Theiler von zween Buchstaben und zwo Dimensionen* zurückgeführt. Eine *Anwendung dieser Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 37) geschieht in Abschnitt 37 ausführlich auf drei Seiten anhand der *Größe*

$$x^5-4ax^4-5a^2x^3+4b^2x^3-a^3x^2-14ab^2x^2+3b^4x-a^4x-3ab^2.$$

Als *ein ander Exempel* (Leitsatz 38) wird in Abschnitt 38 die *Größe* $2x^5+3ax^4+b^2x^3-a^2x^3+4ab^2x^2+6a^2b^2x+2ab^4-2a^3b^2$ ausführlich auf fünf Seiten auf Teiler untersucht. Dies geschieht mit Hilfe der *Anwendung der im XIV. §. angegebenen Methode, alle Theiler einer Zahl ...* zu finden, auf Buchstabengrößen[1].

Am Ende dieses Abschnitts befindet sich die VII. Tafel, die die letzten drei Beispiele zur Auffindung der Teiler zweiten Grades in übersichtlicher Form enthält.

Abschnitt 39 macht die Bemerkung, daß die Methode, alle Teiler dritten und vierten Grades usw. einer Größe zu suchen, die von mindestens sechstem Grad ist und keine Teiler ersten oder zweiten Grades enthält, der eben beschriebenen Methode analog ist. *Die Anfänger mögen sich also daran üben* (Abschnitt 39).

Was man thun muß, wenn man die Theiler der Größen, welche nicht gleichartig sind, finden will (Leitsatz 40), ist Gegenstand von Abschnitt 40. Dieses Problem wird wiederum auf die vorhergehenden zurückgeführt, indem der Term, *z.E. die Größe* $x^6+bx^5-bx^4+x^2+bx-b$, durch Multiplikation der einzelnen Glieder mit entsprechenden Potenzen von a gleichartig gemacht wird und damit übergeht in den Term $x^6+bx^5-abx^4+a^4bx-a^5b$. Die Teiler dieses Terms lassen sich mit den vorhergehenden Methoden finden, anschließend wird a gleich 1 gesetzt.

Ein Fall, in welchem man den Theiler leichter, als durch die vorhergehenden Methoden findet (Leitsatz 41), ist Gegenstand des letzten Abschnitts 41 des dritten Teils: *Wenn einer von den Buchstaben der vorgegebenen Größe nicht mehr als eine Dimension hat, so ist leicht zu sehen, daß*

---

[1] Der in (CLAIRAUT 1752) angegebene Leitsatz *Anwendung der im XIV. §. angegebenen Methode, alle Theiler einer Zahl mit Buchstabengrößen zu finden*, ist die falsche Übersetzung des französischen Leitsatzes *Application de la méthode donnée Art. XIV. pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, aux quantités littérales.* Richtig ist die oben genannte Übersetzung.

nur einer unter den Theilern dieser Größe diesen Buchstaben in sich enthalten kann. Es wird also wenigstens ein Theiler vorhanden seyn, in welchem er nicht ist ...

1.3.2.5 *Vierter Theil. Von der Auflösung der Gleichungen von jeglichen Graden, wenn sie nicht mehr als zwey Glieder haben, oder wenn sie zwar drey Glieder haben, aber durch Hülfe der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade, auf zwey Glieder gebracht werden können; nebst verschiedenen um dieser Gleichungen willen anzustellenden Verrichtungen, z.E. der Erhöhung der Potenzen, der Ausziehung der Wurzeln, der Entwickelung der Wurzelgrößen, etc.*

Nachdem wir gesehen haben, wie man aus einer Gleichung von mehr als zween Graden die etwan darinnen enthaltenen Gleichungen vom ersten und zweyten Grade ziehet, so müssen wir auch sehen, was man gethan hat, um diejenigen Gleichungen aufzulösen, welche sich durch diese Methode nicht auflösen lassen (Vorbemerkung zum vierten Teil).

Von den Gleichungen vom dritten Grade mit zwey Gliedern (Leitsatz 1), *z.E.* $ax^3 = b$, handelt Abschnitt 1. Dabei treten dritte Wurzeln auf: *Die cubischen Wurzelgrößen können nur ein Zeichen auf einmal haben* (Leitsatz 2). Daraus folgert Abschnitt 3 einen Widerspruch zu einem weiter vorn aufgestellten Satz, daß eine Gleichung n-ten Grades n Lösungen hat. Im weiteren Verlauf des Abschnitts wird dann an der Gleichung $x^3-\frac{b}{a} = 0$ gezeigt, daß die anderen beiden Lösungen imaginär sind. Da dabei zur Vereinfachung $\frac{b}{a} = c$ gesetzt wurde, muß in Abschnitt 4 bei der Resubstitution das Problem gelöst werden, *wie man die cubischen Wurzeln vermehret* (Leitsatz 4). Abschnitt 5 zählt die *Wurzeln der Gleichung vom dritten Grade mit zwey Gliedern* (Leitsatz 5) noch einmal auf. *Die erste ist eine wirkliche, und die andern beyden sind unmögliche, doch aber allemal so beschaffen, daß man sagen kann, daß sie die vorgegebene Gleichung lösen* (Abschnitt 5).

Als Verallgemeinerung des eben gelösten Problems handelt Abschnitt 6 *von den Gleichungen von zwey Gliedern und von einem jeglichen Grade. ... Diese Gleichungen können niemals mehr als zwo wirkliche Wurzeln haben* (Leitsätze 6).

Da die Gleichungen mit zwei Gliedern prinzipiell gelöst sind, geht es im folgenden darum, die dabei auftretenden Wurzeln so weit wie möglich zu vereinfachen. Abschnitt 7 stellt dazu einige Vor*betrachtungen über die Erhöhung der Potenzen* (Leitsatz 7) an, wie beispielsweise ein Term $\frac{abc}{de}$ zur m-ten Potenz erhoben wird usw. Eine *Anwendung der vorhergehenden Betrachtungen auf die Ausziehung der Wurzeln* (Leitsatz 8) am Beispiel der dritten Wurzel aus $\frac{a^3b^6}{c^9}$ behandelt Abschnitt 8. *Von der Ausziehung der Wurzeln, wenn man unvollkommene Potenzen hat* (Leitsatz 9), handelt Abschnitt 9. Hier soll die fünfte Wurzel aus $\frac{32a^{10}b^8}{486c^7}$ und die dritte Wurzel aus $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ gezogen werden.

Mit dem letzten Beispiel ist der Problemkreis eröffnet, Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken zu ziehen. *Die bei dieser Operation zu beobachtende Methode zu finden, wollen wir erstlich einige Betrachtungen über die umgekehrte Aufgabe, das ist, über die Erhöhung zusammengesetzter Größen zu gegebenen Graden anstellen, und hernach die Grundregeln daraus herleiten, nach welchen man die Wurzeln aus solchen Größen ausziehen muß* (Abschnitt 10). So befaßt sich Abschnitt 11 damit, *woraus der Cubus einer binomischen Größe besteht* (Leitsatz 11), und als dessen Umkehrung nennt Abschnitt 12 die *Methode zu Ausziehung der Cubicwurzel aus zusammengesetzten Ausdrücken* (Leitsatz 12). Als *erstes Exempel* (Leitsatz 13) wird in Abschnitt 13 die dritte Wurzel aus $8y^6+60y^4b^2+150b^4y^2+125b^6$ gezogen, als *zweytes Exempel* (Leitsatz 14) befaßt sich Abschnitt 14 mit dem Term $x^6+6bx^5+21b^2x^4+44b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$.

Mit den Grundrechenarten für Wurzelgrößen befassen sich die folgenden Abschnitte. *Zusammensetzungen und Abziehungen der Wurzelgrößen von jeglicher Art* (Leitsatz 15) be-

handelt Abschnitt 15, *Vermehrung und Theilung derer Wurzelgrößen, welche einerley Exponenten haben* (Leitsatz 16), sind Gegenstand von Abschnitt 16. *Um dieses mit Wurzelgrößen von verschiedenen Exponenten zu verrichten, muß man sie auf einerley Exponenten bringen* (Leitsatz 17). Die *Methode dieser Reduction* wird im folgenden an einigen Beispielen erklärt. *Wenn man z.E.* $\sqrt[3]{ab}$ *und* $\sqrt[5]{abb}$ *auf einerley Zeichen bringen soll, so erhöhe ich ab auf die Potenz 5, und schreibe* $\sqrt[15]{}$, *anstatt* $\sqrt[3]{}$; *wodurch ich die Größe* $\sqrt[15]{a^5b^5}$ *bekomme, welche mit* $\sqrt[3]{ab}$ *einerley ist.* Das folgt unmittelbar aus den in Abschnitt 7 angestellten *Betrachtungen über die Erhöhungen der Potenzen*. Aus diesen Betrachtungen folgt ebenfalls, *wie man die vorhergehenden Operationen auf eine andere Art verrichtet* (Leitsatz 18). Denn aufgrund der Betrachtungen und dem, *was im VIII. §. von der Ausziehung aller Arten von Wurzeln gesagt worden* ist, kann man Wurzeln auch als Potenzen mit gebrochenen Exponenten schreiben. *Die Neuheit der in dem vorhergehenden §. gebrauchten Ausdrückungen, und die Allgemeinheit, welche sie in die Auflösungskunst bringen* (Abschnitt 19), führen in Abschnitt 19 dazu, noch einmal zu erklären, *was eine Bruchpotenz ist, was eine negative Potenz ist,* und *was die Potenz 0 ist* (Leitsätze 19).

Nachdem man alle Schwierigkeiten, welche etwan bey den Gleichungen von zwey Gliedern vorfallen, gehoben, so ist es natürlich, daß man auch gesuchet hat, alle Gleichungen, welche nur drey Glieder haben, auf eine allgemeine Art aufzulösen: aber es fehlet noch viel, daß man eine allgemeine Methode für alle Gleichungen von dieser Art gefunden haben sollte. Man hat sich begnüget, sie in einigen besondern Fällen aufzulösen (Abschnitt 20). Der Rest des Abschnitts handelt daher *von den Gleichungen mit drey Gliedern, welche nach der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade aufgelöset werden* (Leitsatz 20). *Diese Gleichungen sind alle diejenigen, welche man unter diese allgemeine Formel* $x^{2m}+ax^m = b$ *bringen kann* (Abschnitt 20). Die Gleichung wird hier gelöst, indem die linke Seite zum vollständigen Quadrat ergänzt wird.

Innerhalb dieses Abschnitts befindet sich die VIII. Tafel, die die Beispiele der Abschnitte 13 und 14 sowie einige Beispiele zu den Potenzgesetzen enthält.

Als *Exempel der vorhergehenden Methode* (Leitsatz 21) behandelt Abschnitt 21 die Gleichung $x^4-bbxx = bbcc$, *ein ander Exempel* (Leitsatz 22) ist in Abschnitt 22 die Gleichung $x^6-2a^2bx^3 = a^6$, ein *drittes Exempel* (Leitsatz 23) die Gleichung $x^4-(aa+bb)x^2 = -aabb$, und schließlich ein *viertes Exempel* (Leitsatz 24) die Gleichung $x^4-(2gh+4ff)xx = -gghh$. Als Zwischenergebnis tritt bei der letzten Gleichung $x = \pm\sqrt{gh+2ff\pm2f\sqrt{gh+ff}}$ auf. *Wer einige Fertigkeit im Rechnen besitzet, der konnte bey diesem Exempel leicht muthmaaßen, daß die Größe* $gh+2ff\pm2f\sqrt{gh+ff}$ *eine Quadratwurzel habe: aber es können viel Fälle vorkommen, da die auf eben diese Art gefundenen Größen auch Quadrate sind, ohne daß man es vermuthet. Es ist also nöthig, eine allgemeine Methode zu suchen, wodurch man sehen möge, welche Größen von dieser Art sind, und ihre Wurzeln finden könne* (Abschnitt 24). Die *Methode, die Quadratwurzeln der Größen, welche zum Theil commensurabel, zum Theil Wurzelgrößen sind, zu finden* (Leitsatz 25), ist daher Gegenstand von Abschnitt 25. Auch diese Methode wird wieder erarbeitet, indem, ausgehend von der gesuchten Quadratwurzel, "rückwärts" überlegt wird. War A+B die Größe, aus der die Wurzel gezogen werden sollte (A der Rational-, B der Irrationalteil), und p+q die gesuchte Wurzel aus A+B, so ergibt sich $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ und $p = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{-1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$. Da diese Ergebnisse ziemlich kompliziert aussehen, begründet Abschnitt 26, daß diese Methode doch geeignet ist zur Wurzelberechnung, da *die Größe* A^2-B^2, *welche unter dem Wurzelzeichen steht, ein commensurables Quadrat* ist. Es folgen in den Abschnitten 27 bis 30 die *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 27), nämlich auf $aa+2c\sqrt{aa-cc}$, als *ein ander Exempel* (Leitsatz 28) $16+6\sqrt{7}$, als *drittes Exempel* (Leitsatz 29) $ap-2a\sqrt{ap-aa}$ und als *viertes Exempel* (Leitsatz 30) der Term

$b^2-ab+\frac{1}{4}a^2+2\sqrt{ab^3-2a^2b^2+\frac{1}{4}a^3b}$.

Nachdem man gelernet, wie man unter denen Größen, welche zum Theile rational, zum Theile irrational sind, diejenigen unterscheiden kann, welche Quadrate sind, so hat man sich bemühen müssen, auch diejenigen zu unterscheiden, welche Cubicgrößen, oder andere höhere Potenzen sind (Abschnitt 31). Abschnitt 31 behandelt daher die *Methode, die Cubicwurzel derer Größen zu finden, welche zum Theil commensurabel und zum Theil incommensurabel sind* (Leitsatz 31), d.h. *einer jeden Größe A+B, in welcher A rational und B eine Wurzelgröße vom zweyten Grade ist.* Die Methode wird, analog zur *Methode, die Quadratwurzeln ... zu finden*, entwickelt. Eine *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 32) geschieht in Abschnitt 32 am Beispiel $7a^3-3a^2b+5(aa-ab)\sqrt{2aa-ab}$. Als *ein ander Exempel* (Leitsatz 33) berechnet Abschnitt 33 die *Cubicwurzel von* $2aac-abc-bbc-(2a-b)\sqrt{aacc-bbcc}$.

Wenn die Glieder der Größe, deren Cubicwurzel man finden will, Nenner haben, so bringt man sie erstlich alle auf einerley Nenner, und theilet hernach die Cubicwurzel des Zählers durch die Cubicwurzel des Nenners (Abschnitt 34). *Wenn die vorgegebene zum Theil commensurable, zum Theil incommensurable Größe nur aus Zahlen besteht, so kann man ihre Cubicwurzel leichter finden, als nach der vorhergehenden Methode* (Abschnitt 35). Dieser Abschnitt befaßt sich daher mit der *Methode, die Cubicwurzeln der zum Theile commensurablen, zum Theile incommensurablen Zahlengrößen zu finden* (Leitsatz 35). Waren A+B die Größe, deren dritte Wurzel man sucht (A der Rational-, B der Irrationalteil), und p+q entsprechend die gesuchte Wurzel, so ergibt sich für p nach kurzer Rechnung $p = \frac{\sqrt[3]{A-B}+\sqrt[3]{A+B}}{2}$. Die Berechnung dieses Werts ist nun einfacher als bei der eben behandelten Methode für *Buchstabengrößen, ... denn wenn man für* $\sqrt[3]{A-B}$ *und für* $\sqrt[3]{A+B}$ *diejenigen ganzen Zahlen nimmt, welche ihnen am nächsten sind, so wird der Fehler, den man bey jeglicher von diesen Größen begehen kann, noch*

nicht $\frac{1}{2}$ *seyn, und folglich kann die ganze Zahl, welche man für ... p ... bekömmt, niemals um Eins von dem wahren Werthe von p unterschieden seyn; und da dieser wahre Werth von p eine ganze Zahl seyn muß, so wird er durch diese Mittel vollkommen bestimmet seyn* (Abschnitt 35). Eine *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 36), nämlich auf $7+5\sqrt{2}$, geschieht in Abschnitt 36. Als *ein ander Exempel* (Leitsatz 37) wird in Abschnitt 37 die dritte Wurzel aus $5+3\sqrt{3}$ gezogen.
Wie man die vorhergehende Methode einfacher macht (Leitsatz 38), beschreibt Abschnitt 38. Da bei allen bisher beschriebenen Methoden zur Berechnung der dritten Wurzel der Ausdruck $\sqrt[3]{A^2-B^2}$ berechnet werden muß, ist es einfacher, statt $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$ den Wert von $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\frac{\sqrt[3]{AA-BB}}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ zu berechnen. Eine *Anwendung dieser neuen Methode* (Leitsatz 39) folgt in Abschnitt 39 am Beispiel $7+5\sqrt{2}$.

Eine Unsicherheit dieser Methode nennt Abschnitt 40: *Diese neue Methode könnte in denen Fällen fehlerhaft werden, da A und B verschiedene Zeichen haben. ... Was man in diesem Falle zu thun hat* (Leitsätze 40), ist, daß man zunächst *sowohl A als B positiv* voraussetzt, *und hernach die Wurzel von p+q* bestimmt; *alsdenn aber dem p eben das Zeichen, welches A hat, und dem q eben das Zeichen, welches B hat,* gibt.

Ein Fall, in welchem die vorhergehende Methode zu einem Irrthume verleiten könnte (Leitsatz 41), wird in Abschnitt 41 behandelt. Zur Berechnung der dritten Wurzel aus $2+\sqrt{5}$, die gleich $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ist, *würde weder die vorhergehende, noch die im XXXV. §. vorgetragene Methode, etwas geben, und sie würde in einen Irrthum verleiten, indem sie machen würde, daß man glaubte, es sey gar keine Cubicwurzel aus dieser Größe zu bekommen* (Abschnitt 41). Um zu wissen, *wie man sich davor in acht nehmen kann* (Leitsatz 41), wird zunächst untersucht, *welches alle diejenigen Wurzeln mit Brüchen sind, deren Cubiczahlen ganze Zahlen seyn können* (Abschnitt

41). Das Ergebnis dieser Überlegungen ist: *Wenn man also nach der vorhergehenden Methode die Wurzel einer Größe A+B, deren rationaler oder commensurabler Theil A und der irrationale Theil B ganze Zahlen sind, nicht hat finden können, so darf man nur diese Größe durch 8 vermehren, und nach eben dieser Methode die Cubicwurzel der neuen Größe, welche man durch diese Vermehrung bekömmt, suchen. Wenn es nicht gelingt, so ist man sicher, daß die vorgegebene Größe kein Cubus ist. Wenn es aber gelingt, so ist die Hälfte der Cubicwurzel, welche man alsdenn bekömmt, die gesuchte Wurzel* (Abschnitt 41).
Abschnitt 42 macht, analog zu Abschnitt 34, eine Aussage darüber, was zu tun ist, *wenn die Zahl A und die Wurzelgröße B Brüche sind* (Abschnitt 42). Und Abschnitt 43 befaßt sich damit, *was man zu thun hat, wenn die Cubicwurzel die Summe zwoer Wurzelgrößen seyn soll* (Leitsatz 43), d.h., *wenn man die Cubicwurzel aus einer Größe ziehen sollte, welche aus zwo Wurzelgrößen vom zweyten Grade zusammengesetzt wäre* (Abschnitt 43). Durch Multiplikation von A+B *durch den Cubus einer von den Wurzelgrößen, welche diese Größe enthielte,* wird das Problem auf die vorhergehenden zurückgeführt (Abschnitt 43).

Wie man die Wurzel vom vierten Grade von denen Größen findet, welche von eben der Art sind, wie die vorhergehenden (Leitsatz 44), beschreibt Abschnitt 44. *Was man allemal thun muß, wenn der Exponent der Wurzel eine gerade Zahl ist* (Leitsatz 45), ergibt sich aus Abschnitt 44: *Man muß erstlich die Quadratwurzel suchen* (Abschnitt 45).

Für die Wurzeln vom fünften Grade (Leitsatz 46) ergibt sich eine Methode, *welche der, die man bey der Cubicwurzel beobachtet hat, ähnlich ist* (Abschnitt 46). Die völlig analogen Ergebnisse $p = \frac{\sqrt[5]{A+B}+\sqrt[5]{A-B}}{2}$ und $p^2-q^2 = \sqrt[5]{A^2-B^2}$ werden in diesem Abschnitt daher nicht mehr entwickelt, sondern nur noch angegeben. *Ebenso würde es mit Wurzeln von höhern Graden beschaffen seyn* (Abschnitt 47). *Für die*

Wurzeln von jedem Grade m (Leitsatz 47[1]) erhält man daher entsprechende Bestimmungsgleichungen für p und q. *Diese Lehrsätze überhaupt zu beweisen, darf man nur zeigen, daß, wenn A+B die Potenz m von p+q ist, A-B die Potenz m von p-q ist* (Abschnitt 47). *Was den Beweis hiervon anlanget, daß A-B die Potenz m von p-q ist, wenn A+B die Potenz m von p+q ist, so würde man leicht einen durch Induction finden. Denn wenn man dem m nach und nach verschiedene Werthe gäbe, und befände, daß dieser Lehrsatz in jedem besondern Falle seine Richtigkeit hätte, so würde man daraus schließen, daß er überhaupt wahr wäre. Aber man sieht wohl, daß man sich an einer solchen Art zu beweisen nicht eher begnügen kann, als nur, wenn man keinen allgemeinen Ausdruck für die Potenz m von p+q, und für die Potenz m von p-q finden könnte. Man muß also diesen allgemeinen Ausdruck suchen, welcher ohnedieß die Neugier aller Analysten erwecken muß* (Abschnitt 47). *Von der Art, eine zweytheilige Größe auf eine jede Potenz zu erhöhen* (Leitsatz 48), handelt daher Abschnitt 48. *Wir wollen in dieser Absicht dasjenige wieder vornehmen, was wir in dem II. §. des III. Theiles gesagt haben, wo wir eine Gleichung aus dem Producte ihrer Wurzeln x+a, x+b, x+c etc. gemacht* haben (Abschnitt 48). Damit ist das Problem prinzipiell bis auf die Bestimmung der Binomialkoeffizienten gelöst. *Es kömmt also nunmehr darauf an, zu wissen, wie viel aus einer Menge m von Buchstaben dergleichen Producte, als ab, ac, bc, etc. entstehen, wenn ie zween und zween genommen werden; wieviel Producte abc, abd, bcd, acd, etc. daraus entstehen, wenn drey und drey genommen werden, wieviel Producte abcd, abde, abce, acde, bcde, etc. entstehen, wenn viere und viere genommen werden etc.* (Abschnitt 48). Die letzten drei Seiten des Abschnitts beschäftigen sich daher mit der Bestimmung der Binomialkoeffizienten, bis schließlich die *allgemeine Formel für die Erhöhung des p+q auf die Potenz m* (Leitsatz 48, 2. Teil)

---

[1] Leitsatz 47 fehlt in (CLAIRAUT 1752) auf Seite 274, ist aber im Inhaltsverzeichnis aufgeführt.

gefunden ist: $p^m + mqp^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}q^2p^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}q^3p^{m-3}$ + *etc.* (Abschnitt 48).

Was den Werth von $(p-q)^m$ *anlanget, so ist es klar, daß man, um denselben zu finden, das q in dieser Formel nur negativ machen darf ...* (Abschnitt 49).

Aus den beiden vorhergehenden Abschnitten ergibt sich nun der *Beweis des im XLVII. §. enthaltenen Lehrsatzes* (Leitsatz 50).

Abschnitt 51 bringt eine *Anwendung der vorhergehenden Formel auf ein Exempel* (Leitsatz 51). Hier wird $(3ac-2bd)^5$ berechnet.

Aus der binomischen Formel mit zwei Gliedern folgt unmittelbar, *wie man die vorhergehende Formel auf Größen von mehr, als zwey Gliedern anwendet* (Leitsatz 52). Ein *Exempel* dazu bringt Abschnitt 53.

Nachdem man die vorhergehende Formel gefunden, hat man gar bald muthmaßen müssen, daß sie sich auch auf andere Potenzen erstrecken müsse, als auf diejenigen, welche ganze und positive Zahlen zu Exponenten haben (Abschnitt 54). Nach einer kurzen mathematischen Begründung dieser Vermutung fährt CLAIRAUT fort: *Mit einem Worte, die Ordnung und Allgemeinheit, welche man allezeit in den analytischen Operationen gefunden, mußte auf die Gedanken bringen, daß, obgleich anfänglich die vorhergehende Formel nur gefunden worden, als man vorausgesetzet, daß m eine ganze und positive Zahl sey, sie doch auf alle Werthe von m angewendet werden könne. Aber wenn man es auch noch so wahrscheinlich fände, daß dem also sey, so würde sich doch ein Mathematiker an dieser Wahrscheinlichkeit noch lange nicht begnügen lassen. Alles, was sie in seinem Verstande wirken könnte, wäre dieses, daß er dadurch angereizet würde, sich Mühe zu geben, um einen Beweis davon zu erlangen* (Abschnitt 54). *Es wird* daher im weiteren Verlauf des Abschnitts *gezeigt, daß die vorhergehende Formel noch gültig ist, wenn der Exponent ein Bruch ist* (Leitsatz 54). *Eben diese Formel erstreckt sich auch auf die negativen Potenzen* (Leitsatz 55), was in Abschnitt 55 begründet wird. *Aber so sehr man*

auch durch einen allgemeinen Beweis von einer Wahrheit versichert ist, so will man sie doch immer auch gern durch eine besondere Anwendung bestätigt sehen. Wenn man z.E. weis, daß die vorhergehende Formel zur Erhöhung jeglicher Größen auf Bruchpotenzen gut ist, so ist es natürlich, daß man sie auch auf eine Größe anwenden will, von welcher man schon weis, daß sie vollkommen eine Wurzel oder eine gebrochene Potenz hat (Abschnitt 56). Als *Exempel einer durch die Formel der Erhöhung der Potenzen gefundenen Quadratwurzel* (Leitsatz 56) wird in Abschnitt 56 daher die *Potenz* $\frac{1}{2}$ *von der Größe* $1+2b+b^2$ ... berechnet.

Innerhalb dieses Abschnitts befindet sich die IX. Tafel, in der einige Beispiele, u.a. zur binomischen Formel, aus den letzten Abschnitten enthalten sind.

Daß die soeben erfolgte Verifizierung auch *einen wirklichen Nutzen* (Abschnitt 57) bringt, ist Gegenstand von Abschnitt 57: *Wenn die Größen keine vollkommenen Wurzeln haben, so findet man welche nach der vorhergehenden Methode, welche ihnen nahe kommen* (Leitsatz 57). Anhand der Berechnung von $(a+b)^{1/5}$ wird plausibel gemacht, *was eine unendliche Reihe ist* (Leitsatz 57, 2. Teil). Und Abschnitt 58 beschließt den vierten Teil des Buchs mit dem Leitsatz: *Alle Arten von Größen können durch die vorhergehende Formel in Reihen ausgedrücket werden.*

1.3.2.6 *Fünfter Theil. Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade.*

Abschnitt 1 präsentiert gleich *die am meisten zusammengesetzte Gleichung vom dritten Grade* (Leitsatz 1) in der Form $y^3+dy^2+ey+f = 0$. Die bekannte *Verwandlung, durch welche man aus dieser Gleichung ein Glied wegbringt, welches man will* (Leitsatz 2), behandelt Abschnitt 2. Als - heuristisch nicht sehr überzeugende Motivation für die zugehörige Substitution schreibt CLAIRAUT (Abschnitt 1): *Welches ist nun das natürlichste Mittel, eine Gleichung in*

eine andere zu verwandeln, in der man frei ist, irgendeine Veränderung durchzuführen? Es ist dies, in dieser Gleichung an die Stelle der Unbekannten eine Größe zu setzen, in der man einen Buchstaben unbestimmt läßt, so daß man sich seiner nach Belieben bedienen kann[1].
Als *Anwendung der vorhergehenden Verwandelung auf eine Gleichung vom vierten Grade* (Leitsatz 3) führt Abschnitt 3 die Gleichung $y^4+ay^3+by^2+cy+d = 0$ in die entsprechende ohne zweithöchstes Glied über. *Man schafft gemeiniglich nur das zweyte Glied weg* (Leitsatz 3), *weil die Wegschaffung der übrigen fast allemal verwickelte und sehr mühsame Rechnungen mit Wurzelgrößen verursachet* (Abschnitt 3).

Mit der *Wegschaffung des zweyten Gliedes in einer Gleichung vom fünften Grade* (Leitsatz 4) befaßt sich Abschnitt 4, mit der *in einer Gleichung von einem jeglichen Grade m* Abschnitt 5.

Nach dieser kleinen Ausschweifung (Abschnitt 6) befaßt sich Abschnitt 6 mit der *Auflösung der allgemeinen Gleichung* $x^3+px+q = 0$ (Leitsatz 6). Dies geschieht mit dem Hinweis auf die in Abschnitt 1 gegebene Motivation durch die Substitution $x = u+z$, die die Gleichungen überführt in $u^3+3uuz+3uzz+z^3+pu+pz+q = 0$. *Wir wollen nunmehr setzen, es wäre eine von den unbekannten Größen u oder z so beschaffen, daß* $u^3+z^3+q = 0$ *wäre ...* (Abschnitt 6). Damit ergibt sich nach einigen Überlegungen die Gleichung $z^6+qz^3 = \frac{p^3}{27}$. Die Lösung dieser Gleichung war bereits im vierten Teil behandelt worden (in Abschnitt 20). Auf diese Weise erhält man allerdings nur eine Lösung der ursprünglichen Gleichung: *Die vorhergehende Formel giebt nur eine von den drey Wurzeln. ... Wie man die beyden andern findet* (Leitsätze 7), wird in Abschnitt 7 beschrieben: Man teilt die ursprüngliche Gleichung durch den gefundenen Linearfaktor und löst die so entstehende Gleichung zweiten Grades. Diese beiden Lösungen sind *allemal unmöglich ..., wenn*

---

[1] Dieses Zitat ist nicht (CLAIRAUT 1752) entnommen, sondern ein von mir übersetzter Abschnitt aus (CLAIRAUT 1746).

$\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ *eine wirkliche Größe ist* (Abschnitt 7).

Ein Fall, in welchem die vorhergehende Formel das x nicht bekannt machen kann, wegen der darinne befindlichen unmöglichen Größen (Leitsatz 8), ist der, daß die auftretende Diskriminante $\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2$ negativ wird. *Man kann nicht nur aus dem Ausdruck des x in diesem Fall nicht schließen, daß die gesuchte Wurzel unmöglich ist: sondern man hat sich auch durch verschiedene Mittel versichert, daß dieser Werth alsdenn allezeit wirklich ist* (Abschnitt 9). *Es wird* in Abschnitt 9 daher *dennoch bewiesen, daß x in diesem Falle wirklich ist* (Leitsatz 9): Substituiert man $\frac{1}{2}q$ durch a und die Wurzel aus der Diskriminanten durch $b\sqrt{-1}$, *so bekömmt man* $x = \sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$.

Nun wollen wir die Werthe von $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ *und von* $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, *nach der Formel suchen, welche im XLVIII. §. des vierten Theiles für die Erhöhung der zweytheiligen Potenzen gegeben worden* (Abschnitt 9). Die beiden sich ergebenden unendlichen Reihen ergeben eine unendliche Reihe für x, *welche gar keine unmögliche Wurzel in sich enthält* (Abschnitt 9). *Durch eben diese Methode kann man durch Näherung einen Werth von x finden* (Leitsatz 10).

Im Gegensatz zu Abschnitt 7 stellt Leitsatz 11 fest: *Die beyden andern Werthe von x sind in eben diesem Falle auch wirklich,* was in diesem Abschnitt wieder mit Hilfe unendlicher Reihen begründet wird.

Abschnitt 12 befaßt sich damit, *wie man aus den Wurzeln der Gleichung* $x^3+px+q = 0$ *die Wurzeln der Gleichung* $y^3+dy^2+ey+f = 0$ *herleitet* (Leitsatz 12).

Leitsatz 13 faßt die bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen: *In einer Gleichung vom dritten Grade sind entweder alle drey Wurzeln wirklich, oder es ist eine wirklich, und zwo sind unmöglich. Wie man diese Fälle unterscheidet* (Leitsätze 14), folgt unmittelbar aus den vorhergehenden Abschnitten, nämlich anhand des Vorzeichens der Diskriminanten. Einen Sonderfall der Diskriminanten behandelt Abschnitt 15: *Wie die Wurzeln beschaffen sind, wenn*

$\frac{1}{27}p^3$ *negativ und* $= \frac{1}{4}qq$ *ist* (Leitsatz 15).

Mit Abschnitt 16 beginnt die *Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 16). In Abschnitt 16 werden die Lösungen der Gleichung $y^3+3yy-3y+25 = 0$ berechnet. *Ein ander Exempel mit einer Gleichung vom sechsten Grade, welche auf eine vom dritten Grade heruntergesetzet werden kann* (Leitsatz 17), behandelt Abschnitt 17: $z^6+9z^4+39zz+55 = 0$. Ein zweiter Leitsatz dieses Abschnitts verallgemeinert die Problemlösung: *Gleichungen von höhern Graden, die man eben so heruntersetzen kann,* sind von der Form $z^{3m}+az^{2m}+bz^m+c = 0$.

Abschnitt 18 stellt die Aufgabe, *die Gleichung* $x^3+3x-4 = 0$ *aufzulösen.* Mit den vorhergehenden Methoden lassen sich die Lösungen ohne Mühe finden, *man hätte* aber auch *ohne diese Formel zu eben diesem Werthe von x gelangen können ... Denn man würde gefunden haben, daß x-1 ein vollkommener Theiler der Größe* $x^3+3x-4 = 0$ *ist* (Abschnitt 18).
Als *viertes Exempel, in welchem die im VI. §. enthaltene Formel unzulänglich ist* (Leitsatz 19), stellt Abschnitt 19 die Aufgabe, *die Gleichung* $x^3-90x-98 = 0$ *aufzulösen.* Hier ist die Diskriminante negativ, und da auch kein ganzzahliger Teiler des absoluten Gliedes Lösung ist, werden als *Anwendung der im X. §. enthaltenen Methode, die Wurzeln durch Näherung zu finden* (Leitsatz 19, 2. Teil), die Koeffizienten der gegebenen Gleichung in die allgemeine Form der unendlichen Reihe von Abschnitt 10 eingesetzt und die ersten Glieder konkret berechnet.

Eine *Unbequemlichkeit bey der im X. §. gezeigten Näherung* (Leitsatz 20) nennt Abschnitt 20: *Die Methode, welche wir angewendet haben, um die Gleichungen vom dritten Grade, in welchen alle drey Wurzeln wirklich sind, durch die Näherung aufzulösen, hat diese Unbequemlichkeit, daß, wenn a von b wenig unterschieden ist, die Glieder der Reihe, welche den Werth von x ausdrücket, so langsam abnehmen, daß man ihrer eine sehr große Menge haben muß, wenn man dem wahren Werthe von x ziemlich nahe kommen will, und daß folglich die Rechnungen überaus mühsam werden. Es ist*

also nöthig, eine Methode zu suchen, welche in der Ausübung von allgemeiner Bequemlichkeit sey.

Eine andere und in der Ausübung leichtere Methode der allgemeinen Näherung (Leitsatz 21) entwickelt daher Abschnitt 21. Die Ausgangsgleichung $x^3-px+q = 0$ läßt sich durch geeignete Wahl des m in der Substitution $x = mz$ in die Gleichung $z^3-z = r$ überführen. *Nun bemerke ich, daß, wenn diese Gleichung von der Art derjenigen ist, welche nach der im VI. §. enthaltenen Formel nicht aufgelöset werden können, das r nothwendig kleiner seyn muß, als* $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$ *oder* $\sqrt{\frac{4}{27}}$, *und zugleich, daß eine von den Wurzeln derselben positiv und größer seyn muß, als Eins, aber kleiner als* $\frac{4}{3}$. *... Dieses vorausgesetzt, mache ich* $z = 1+\delta$ (Abschnitt 21). Die Gleichung geht dann über in die Gleichung $2\delta+3\delta\delta+\delta^3 = r$, und da δ^3 aufgrund der eben erfolgten Überlegungen kleiner als 0,0037 ist, wird zunächst die einfachere Gleichung $2\delta+3\delta\delta = r$ gelöst. *Um zu wissen, wie groß der Irrthum seyn kann, welchen man bey dieser Methode begeht, indem man das Glied* δ^3 *wegläßt, so wollen wir den Fall nehmen, da dieses Glied am größten ist* (Abschnitt 21). Diese Überlegung ergibt: *Die ietzt gezeigte Methode giebt gleich anfänglich x wenigstens bis auf* $\frac{1}{1000}$ *richtig an* (Leitsatz 21).

Wie man die Näherung noch genauer macht (Leitsatz 22), wird in Abschnitt 22 beschrieben. Hat man nämlich mit der eben beschriebenen Methode einen Wert k für x gefunden, so kann man annehmen, der wahre Wert von x sei $k+\varepsilon$. Mit diesem Ansatz läßt sich das eben beschriebene Verfahren wiederholen usw.

Eine *Anwendung dieser Methode auf ein Exempel* (Leitsatz 23) bringt Abschnitt 23: *Es sey z.E. die Gleichung* $z^3-z = \frac{1}{3}$. Wiederholte Anwendung der o.g. Methode ergibt dann, *für den verbesserten Werth von z, 1,137158164.*

Ein ander Exempel (Leitsatz 24), nämlich die Gleichung $x^3-13x+5 = 0$, behandelt Abschnitt 24.

Mit Abschnitt 25 beginnt der Problemkreis der *Auflösung*

der allgemeinen Gleichung vom vierten Grade (Leitsatz 25). Die allgemeine Gleichung $y^4+ay^3+by^2+cy+d = 0$ läßt sich mit bekannten Methoden in die Gleichung $z^4+pz^2+qz+r = 0$ überführen. *Um nun hernach diese Gleichung aufzulösen, so scheint das leichteste Mittel dieses zu seyn, daß man sie als das Product zwoer Gleichungen vom zweyten Grade betrachte, und es so mache, daß die Bestimmung der Coefficienten, welche die Glieder dieser Gleichungen vom zweyten Grade haben werden, bloß auf Gleichungen ankomme, welche leichter aufzulösen sind, als die vorgegebene Gleichung* (Abschnitt 25). Hat die eine Gleichung die Form $zz+xz+t = 0$, so muß die andere die Form $zz-xz+s = 0$ haben. Die Überlegungen zur Bestimmung von x, s und t führen zu einer Gleichung sechsten Grades, die nur gerade Potenzen enthält, und damit zum Ergebnis: *Die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade kömmt auf eine Gleichung vom dritten Grade an. Diese Gleichung wird die reducirte genennet* (Leitsätze 25). Als weiteres Ergebnis der Überlegungen folgert Leitsatz 26: *Bey dem vierten Grade kann man die vier Wurzeln durch eine einzige Formel ausdrücken,* nämlich durch $z = \pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}}$.

Man gelanget zu einerley Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade, man mag von den Wurzeln der reducirten Gleichung genommen haben, welche man gewollt hat (Leitsatz 28). Eine Begründung dafür gibt Abschnitt 28.
Aus der allgemeinen Formel für die Lösung der Gleichung vierten Grades schließt Abschnitt 29: *Die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade sind alle wirklich, oder alle unmöglich, oder es sind ihrer zwo wirklich und zwo unmöglich* (Leitsatz 29). Und Abschnitt 30 schließt ferner: *Die unmöglichen Wurzeln vom vierten Grade sind von eben der Art, wie die vom zweyten Grade* (Leitsatz 30), d.h. es treten keine *aus einfachen unmöglichen Wurzeln und aus der Wurzel anderer zum Theil wirklicher, zum Theil unmöglicher Größen* (Abschnitt 30) zusammengesetzte Größen auf.

Eine andere Anmerkung, welche der XVIII. §. an die Hand

geben kann, ist diese (Abschnitt 31): *Wenn von den vier Wurzeln zwo wirklich und zwo unmöglich sind, so kann man die Gleichung vollkommen auflösen. Wenn die vier Wurzeln alle wirklich oder unmöglich sind, so ist es das Gegentheil* (Leitsätze 31). Die Begründung geht auf die reduzierte Gleichung in Abschnitt 28 zurück.

Wie man die Fälle der vier wirklichen und der vier unmöglichen Wurzeln unterscheidet (Leitsatz 32), behandelt Abschnitt 32 und nennt als *Bedingung der vier wirklichen Wurzeln* (Leitsatz 32, 2. Teil), daß in der reduzierten Gleichung *nothwendig ein zweytes Glied negativ, und ein drittes positiv* sein muß, und als *Bedingungen der vier unmöglichen Wurzeln* (Leitsatz 32, 3. Teil), daß *niemals zugleich das zweyte Glied negativ, und das dritte positiv seyn* darf.

Ein weiteres Kriterium nennt Leitsatz 33: *Eine jede Gleichung vom vierten Grade, welche kein zweytes Glied hat, und deren drittes Glied positiv ist, hat unmögliche Wurzeln.* Die Begründung dafür geht auf die Rechnungen zurück, die zur Lösung der Gleichungen vierten Grades angestellt worden waren.

Wenn man gesehen hat, daß die vier Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade wirklich sind, so wird es, ehe man die reducirte Gleichung derselben durch Näherung auflöset, um den Werth von x zu finden, welchen man in dem Werthe von z in der Gleichung vierten Grades *an seine Stelle setzen muß, gut seyn, nach den im dritten Theile gegebenen Methoden zu untersuchen, ob nicht etwan einige von ihren Wurzeln commensurabel sind* (Abschnitt 34). Den *Vortheil, welchen man hat, wenn man die commensurablen Theiler vielmehr in der reducirten, als in der vorgegebenen Gleichung suchet* (Leitsatz 35), beschreibt Abschnitt 35. Er liegt darin, daß sich das bei der Methode der arithmetischen Progressionen auftretende *nöthige Versuchen sehr vermindern* läßt, *weil man in den Theilern des letzten Gliedes nur eine quadrirte Größe mit dem Zeichen - suchen darf* (Abschnitt 35).

Wenn eine Gleichung, in welcher x auf den vierten Grad erhöhet ist, zwo commensurable Wurzeln hat, oder wenn sie bloß aus zween Theilern von zwo Dimensionen entstanden ist, so kann man sagen, daß sie wirklich nicht vom vierten Grade ist, und es ist ganz natürlich, daß sie sich alsdenn nach der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade muß auflösen lassen. Aber es giebt Gleichungen, welche schlechterdings vom vierten Grade sind, und doch nach der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade aufgelöset werden können (Abschnitt 36). Das sind solche Gleichungen, die das *Product der beyden Gleichungen* $zz-2z\sqrt{ab}+aa-2a\sqrt{ab} = 0$ *und* $zz+2z\sqrt{ab}+aa+2a\sqrt{ab} = 0$ sind, in *deren vier Wurzeln ... nur lauter Wurzelzeichen vom zweyten Grade sind* (Abschnitt 36). *Woraus man sehen kann, welches diejenigen Gleichungen vom vierten Grade sind, deren Wurzeln lauter Wurzelzeichen vom zweyten Grade haben* (Leitsatz 36), wird daher im Rest des Abschnitts 36 hergeleitet: Es *muß nothwendig in allen Gleichungen von dieser Art die reducirte Gleichung durch xx, ± einer commensurablen Größe, getheilet werden können. Was man thun muß, um die beynahe wahren Werthe der vier Wurzeln zu bekommen, wenn sie wirklich sind* (Leitsatz 37), und die *Gleichung keinen commensurablen Theiler, auch keinen mit Wurzelzeichen vom zweyten Grade, hat* (Abschnitt 37), sagt Abschnitt 37: Man muß *eine von den Wurzeln ihrer reducirten Gleichung, nach der im XXI. §. gezeigten Methode der Näherung, suchen.*

Mit Abschnitt 38 beginnt die *Anwendung der vorhergehenden Methoden auf ein Exempel* (Leitsatz 38). Abschnitt 38 befaßt sich mit der Gleichung $z^4+3z^2+2z-3 = 0$. Es ergeben sich *zwo wirkliche und zwo unmögliche Wurzeln*, die sich *alle viere durch die vorhergehenden Formeln ausdrücken lassen.*

Als *ein ander Exempel* (Leitsatz 39) behandelt Abschnitt 39 die Gleichung $z^4-6z^2+8z-1 = 0$. Diese Gleichung *gehört unter diejenigen, welche in zwo Gleichungen vom zweyten Grade, deren Coefficienten incommensurabel sind, können zergliedert werden.*

Ein *drittes Exempel* (Leitsatz 40) ist die Gleichung $y^4+16y^3+99y^2+228y+144 = 0$. Die beiden reellen und die beiden imaginären Lösungen ergeben sich mit Hilfe der vorhergehenden Methoden, man hätte aber auch *die einfachen Theiler y+1, y+3 und für den Quotienten yy+12y+48* mittels der Methoden des dritten Teils finden können.

Als *viertes Exempel* (Leitsatz 41) wird in Abschnitt 41 die Gleichung $z^4+11z^2-2z+56 = 0$ gelöst. Da die Diskriminante der reduzierten Gleichung $u^3-\frac{793}{3}u+\frac{41582}{27} = 0$ negativ ist, und da *das Glied $11z^2$ positiv ist, so müssen ... alle vier Wurzeln unmöglich* sein (Abschnitt 41).

Abschnitt 42 behandelt als *fünftes Exempel* (Leitsatz 42) die Gleichung $z^4-5z^2+4z+29 = 0$, die wiederum nur imaginäre Lösungen hat. *Aber man kann durch keine bekannte Methode diesen vier unmöglichen Wurzeln die ordentliche Form der unmöglichen Wurzeln vom zweyten Grade geben, wie in dem vorhergehenden Exempel geschehen ist. Denn da die reducirte Gleichung keinen commensurablen Theiler hat, so kann die vorgegebene Gleichung weder commensurable Theiler, noch Theiler mit einfachen Wurzelzeichen vom zweyten Grade haben* (Abschnitt 42).

Als *sechstes Exempel* (Leitsatz 43) behandelt Abschnitt 43 die Gleichung $z^4-32zz-16z-2 = 0$, deren reduzierte Gleichung drei reelle Lösungen besitzt. Da ihr zweites Glied negativ und das dritte positiv ist, hat die Gleichung vierten Grades vier reelle Lösungen.

Als *siebendes Exempel* (Leitsatz 44) schließlich behandelt Abschnitt 44 die Gleichung $z^4-18z^2+z+70 = 0$, deren Lösungen nach denselben Kriterien wie beim vorhergehenden Beispiel alle reell sind. *Da die reducirte Gleichung keinen commensurablen Theiler hat, ... so muß man sich begnügen, die gesuchten Wurzeln durch Näherung zu finden* (Abschnitt 44).

Der letzte Abschnitt des Buchs befaßt sich damit, *wie man die Wurzelgrößen aus einer jeden Gleichung wegbringt* (Leitsatz 45). *Man muß an die Stelle einer jeden Wurzelgröße eine unbekannte Größe setzen, und dadurch bekömmt man*

1) anstatt der gegebenen Gleichung eine neue Gleichung, welche keine Wurzelgrößen mehr in sich enthält; 2) eben so viel Gleichungen mit zwey Gliedern, als Wurzelgrößen in der vorgegebenen Gleichung waren (Abschnitt 45). Als *Exempel* der daraus sich ergebenden Methode wird im Rest des Abschnitts die Gleichung $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{add}$ behandelt.

Bei der Zusammenfassung der letzten beiden Teile der "Elêments d'algèbre" ist die heuristische Analyse gegenüber der Wiedergabe des Inhalts immer mehr in den Hintergrund getreten. Dies lag insbesondere daran, daß die auftretenden Probleme und Untersuchungen immer komplizierter und die Methoden immer mehr verfeinert wurden, was einen heuristischen Zugang mehr und mehr erschwerte. Es scheint mir daher notwendig, die heuristische Entwicklung der Untersuchung des zentralen Problems der "Elêments d'algèbre" noch einmal geschlossen zusammenzufassen. Dieses zentrale Problem P ist das Problem, Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten zu lösen.

Motiviert wird die Untersuchung von P durch Spezialisierung von P zum Problem P^1_{1z}, bei dem ein konkretes Problem des menschlichen Lebens zur Untersuchung einer Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten führt, deren Koeffizienten gegebene Zahlenwerte sind[1]. Probleme des Typs P^1_{1z} beherrschen die ersten 24 Abschnitte des ersten Teils, wobei nebenbei Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie der Begriff "Gleichung" eingeführt werden und einige technische Probleme (etwa "Nenner wegschaffen") behandelt werden. Den verallgemeinernden Übergang von Problemen des Typs P^1_{1z} zum allgemeinen Typ P^1_{1a} motiviert

---

[1] Bei der Benennung der Probleme bezeichnet ein hochgestellter Index im folgenden den Grad, ein tiefgestellter Zahlenindex die Anzahl der Unbekannten der zugehörigen Gleichung; der tiefgestellte Buchstabe "z" bedeutet, daß die Koeffizienten als konkrete Zahlenwerte, der Buchstabe "a", daß die Koeffizienten als allgemeine "Buchstabengrößen" gegeben sind.

CLAIRAUT in Abschnitt 24, indem er sagt, *daß man einen Theil der Rechnung bey jedem besondern Exempel eben derselben Aufgabe wiederholen muß, und daß man diese Arbeit einmal für allemal verrichten könnte, wenn man eine Auflösung suchte, bey der man sich nicht an diese oder jene besondere Zahl bände, sondern die allgemein wäre, und sich für eine jede gegebene Zahl schickte.*
Um die Schwierigkeiten beim Übergang von P^1_{1z} nach P^1_{1a} so gering wie möglich zu halten, wählt CLAIRAUT das letzte Problem des Typs P^1_{1z}, wobei er nur statt der gegebenen Zahlenwerte völlig analog Buchstaben einsetzt. Die Lösung dieses ersten Problems des Typs P^1_{1a} benutzt er gleich wieder, um in den Abschnitten 27 und 28 zwei analoge Aufgaben des Typs P^1_{1z} zu lösen.

In den folgenden Abschnitten werden nun etliche technische Probleme im Zusammenhang mit der Lösung von Problemen des Typs P^1_{1a} behandelt, wobei immer wieder gezeigt wird, daß die allgemeine Lösung mit einem Schlag viele konkrete Probleme der analogen Art lösen kann. Nebenbei werden wieder Addition, Subtraktion etc. für "Buchstabengrößen" erklärt.

In Abschnitt 52 spricht CLAIRAUT erstmalig von Gleichungen mit mehreren Unbekannten[1]. Dieser Übergang wird - in genetischer Hinsicht bezeichnenderweise - nicht wiederum durch konkrete Zahlenbeispiele etwa des Typs P^1_{2z} motiviert, sondern es wird nur gesagt, daß es in der Algebra solche Aufgaben g i b t , und CLAIRAUT bemerkt weiter: *... so wollen wir sehen, wie man dabey verfährt.* Im folgenden wird ein Problem des Typs P^1_{2a} untersucht. Und erst nach der Lösung dieses Problems - bei der selbstverständlich auch die Lösung des Problems P^1_{1a} eingeht - wird die Lösung auf ein Beispiel, also auf das analoge Problem des Typs P^1_{2z} übertragen.

---

[1] Bei mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten bezeichnet der hochgestellte Index immer den maximalen Grad der auftretenden Gleichungen.

Die zweifache Auflösung eines Problems vom Typ P^1_{2a} auf verschiedenen Wegen in den Abschnitten 67 und 68, die zu Lösungen führen, die sich äußerlich dadurch unterscheiden, daß der zweite x-Wert mit einem Term p-q erweitert ist und der erste nicht, dient CLAIRAUT als Motivation zur Untersuchung des Problems, den größten gemeinsamen Teiler zweier Größen zu finden.

Die letzten Abschnitte des ersten Teils befassen sich mit der Auflösung eines Problems des Typs P^1_{3a}, dessen Betrachtung - genetisch durchaus folgerichtig - nicht mehr motiviert wird. CLAIRAUT verläßt sich offensichtlich auf die mittlerweile geweckte Neugier der Leser, die er im Vorwort der "Eléments d'algèbre" angesprochen hatte. Nachdem dieses Problem in allgemeiner Form gelöst worden ist, wird seine Lösung auf ein analoges Problem des Typs P^1_{3z} übertragen.

Im zweiten Teil spezialisiert CLAIRAUT ein zunächst betrachtetes sehr allgemeines Problem des Typs P^n_{1a} zu den Problemen P^2_{1a} und P^3_{1a} und geht danach zum allgemeinen Thema des zweiten Teils, den Gleichungen zweiten Grades, über.

In heuristisch meisterhafter Weise führt er das Problem P^2_{1a} auf das analoge Problem P^1_{1a} zurück, indem er untersucht, *was diese Gleichungen* (zweiten Grades) *mit den Gleichungen vom ersten Grade für eine Verbindung haben. Nun ist aber klar, daß eine jede Gleichung vom ersten Grade zu einer Gleichung vom zweyten Grade wird, wenn man die beyden Glieder derselben quadriret.* Nachdem das Problem P^2_{1a} also vollständig gelöst ist, wird seine Lösung wiederum auf einige Zahlenbeispiele des Typs P^2_{1z} angewendet.

Daß dabei imaginäre Zahlen auftreten, wird von CLAIRAUT gleich wieder heuristisch ausgenutzt, um eine Motivation zu schaffen, sich mit imaginären Zahlen zu befassen. Ebenso werden die "Exempel" beispielsweise dazu benutzt, Kriterien zu suchen, wann eine Gleichung zweiten Grades imaginäre Lösungen hat etc.

In Abschnitt 27 des zweiten Teils untersucht CLAIRAUT ein Problem, bei dem drei Gleichungen höchstens zweiten Grades

mit drei Unbekannten auftreten. Diese Untersuchung wird wieder nur innermathematisch motiviert, indem er sagt, daß *man ... oft Aufgaben antrifft, in welchen man mehrere unbekannte Größen braucht; so müssen wir sehen, wie man mit diesen Aufgaben verfährt.* Die - recht umständliche - Lösung (durch Elimination) dieses Problems P^2_{3a} ergibt *einen sehr einfachen Werth von y.* Diesen Umstand benutzt CLAIRAUT als Motivation zur Untersuchung, ob man nicht auch *durch einen kürzern Weg dazu gelangen könnte,* und leitet so das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren her.

Das soeben gelöste Gleichungssystem bestand aus ziemlich unkomplizierten Gleichungen. *Aber da in den Gleichungen vom zweyten Grade mit mehr als einer unbekannten Größe nicht allezeit solche leichte Fälle vorkommen; so muß man sehen, was man in nicht so einfachen Fällen zu thun hat.*

Dazu wählt CLAIRAUT in Abschnitt 29 ein *Exempel einer Gleichung vom zweyten Grade mit zwey unbekannten Größen, welches noch verwickelter ist, als das vorhergehende.* Unter heuristischem Aspekt interessant ist hierbei, daß CLAIRAUT die Anzahl der Unbekannten so weit wie möglich senkt, während die Gleichungen des Systems verkompliziert werden. Dadurch erreicht er, daß nicht gleichzeitig auf zwei verschiedenen Ebenen neue Probleme auftreten, die den Leser überfordern würden.

Interessant an dieser Stelle ist ferner der stetige Rückgang der Fremdmotivation zugunsten einer - erhofften - Selbstmotivierung des Lesers: Wurde P^2_{3a} noch durch ein innermathematisches Problem motiviert (*Drey Größen zu finden, welche in geometrischer Progression sind, und derer Summe nebst der Summe ihrer Quadrate gegeben ist*), so heißt es bei P^2_{2a} nur noch: *Wir wollen z.E. folgende beyde Gleichungen vornehmen ...* Das Problem P^2_{2a} wird allerdings nicht gelöst, sondern nur bis zu einer Gleichung vierten Grades mit einer Unbekannten verfolgt.

Die bei dieser Reduzierung des Problems P^2_{2a} benutzte Methode ist so allgemeingültig, daß sie auch auf schwierigere

Probleme, etwa des Typs P^n_{2a}, wobei eine der beiden Gleichungen jeweils nur zweiten bzw. dritten Grades ist, angewendet werden können. Heuristisch interessant ist hier die Problemgenerierung: Es werden nicht nur ausgehend vom Problem Methoden erfunden, sondern es wird auch umgekehrt die Frage gestellt, welche weiteren Probleme mit einer gefundenen Methode behandelt werden können.

Die Methode, auch Probleme anzugehen, die nicht vollständig gelöst, sondern nur vereinfacht werden können, thematisiert CLAIRAUT zu Beginn des dritten Teils der "Eléments d'algèbre": *Wenn sich schon bey denen Gleichungen, welche höher, als auf den zweyten Grad erhöhet gewesen, indem man sie in allen Fällen hat auflösen wollen, große Schwierigkeiten gezeiget haben; so ist es doch gar leicht gewesen, über diese Gleichungen allgemeine Betrachtungen anzustellen, welche haben dienen können, ihre Natur zu entdecken, und sie in vielen besondern Fällen aufzulösen.*

Damit schafft CLAIRAUT eine Motivation, sich auch mit Problemen zu beschäftigen, die umfassend gar nicht gelöst werden können.

Das grundlegende Problem des dritten Teils der "Eléments d'algèbre" ist P^n_{1a}. In analoger Weise zur Lösung von P^2_{1a} konstruiert CLAIRAUT für den Fall n = 3 eine Gleichung, die die Lösungen 2, 3 und 5 haben soll, danach für den Fall n = 5 eine, die a, b, c, d und e als Lösungen hat. Diese beiden Beispiele führen zu mehreren Anmerkungen über die *Eigenschaft der Gleichungen von allen Graden* und letztlich zu der bekannten *Methode, die commensurablen Wurzeln einer Gleichung zu finden.* Der Fortgang der Untersuchungen ist unter heuristischem Aspekt wiederum sehr interessant: Nachdem die oben genannte Methode entwickelt worden ist, wird sofort im nächsten Abschnitt auf eine Schwierigkeit dieser Methode hingewiesen (*daß, wenn irgend eine Wurzel dieser Gleichung ein Bruch wäre, man nicht wissen würde, wie man sie unter den Theilern des letzten Gliedes finden sollte; ...*). Und nachdem die Methode verbessert ist und

auch bei Gleichungen mit Brüchen Anwendung finden kann, heißt es sofort im nächsten Leitsatz: *Unbequemlichkeit der vorhergehenden Methode.*

Hier zeigt sich überaus deutlich, daß die "Eléments d'algèbre" wirklich genetisch aufgebaut sind: Der Leser nimmt Schritt für Schritt teil an der Entwicklung der Theorie und der Methoden und versteht an jeder Stelle, warum eine Methode weiterentwickelt werden muß, nämlich weil jeweils eine - von CLAIRAUT wohldosierte - Schwierigkeit entstanden ist.

Die verbesserte Methode wird in den Abschnitten 14, 17 und 18 auf "Exempel" der Typen P^{3}_{1z}, P^{5}_{1z} und P^{6}_{1z} angewendet. Nachdem diese *Methode, die commensurablen Wurzeln zu findèn,* mehrere Male angewendet worden ist, gibt CLAIRAUT eine Motivation für die Ausdehnung der Untersuchung: *Nachdem man gesehen, wie man aus den Gleichungen von einem jeglichen Grade die commensurablen Gleichungen vom ersten Grade, welche Wurzeln derselben sind, ziehen kann, so war es natürlich, daß man sich auch bemühte, die Gleichungen vom zweyten Grade, welche etwan darinne stecken möchten, herauszuziehen.* Die Entwicklung dieser Methode ist Gegenstand von Abschnitt 19. Und erst nachdem diese Methode in zehn Abschnitten auf Zahlenbeispiele angewendet und dabei erweitert worden ist, so daß der Leser in diesem Gebiet sicher geworden ist, geht CLAIRAUT zu den *commensurablen Theilern von Buchstabengleichungen* über. Diese Untersuchungen beherrschen den Rest des dritten Teils.

Mit speziellen Problemen des Typs P^{n}_{1a} beschäftigt sich der vierte Teil der "Eléments d'algèbre". CLAIRAUT schreibt als Begründung, daß als erstes Gleichungen mit nur zwei Gliedern betrachtet werden: *Damit wir von dem Einfachsten zu dem am meisten Zusammengesetzten fortgehen, so wollen wir mit denen Gleichungen, welche nur zwey Glieder haben, den Anfang machen.*

Trotz dieser Worte läßt sich nicht leugnen, daß der heuristische Gehalt der "Eléments d'algèbre" im vierten und

fünften Teil im Vergleich zu den vorherigen Teilen abnimmt. Nur noch vereinzelt treten heuristische Motivationen auf, wie etwa in Abschnitt 10 des vierten Teils der Satz: *Die bei dieser Operation zu beobachtende Methode zu finden, wollen wir erstlich einige Betrachtungen über die umgekehrte Aufgabe, das ist, über die Erhöhung zusammengesetzter Größen zu gegebenen Graden anstellen, ...* Viel öfter treten Leitsätze des Typs auf: *Was eine Bruchpotenz ist, Was eine negative Potenz ist,* usw. Und wird einmal ein Problem mit einer zweiten Methode noch einmal gelöst (Abschnitt 13), so wird die Entwicklung der zweiten Methode nicht mit einer Schwierigkeit oder Umständlichkeit der ersten motiviert, sondern einfach unmotiviert entwickelt. Erst bei der Behandlung der *Methode, die Cubicwurzeln der zum Theile commensurablen, zum Theile incommensurablen Zahlengrößen zu finden,* ist das Vorgehen wieder heuristisch: Abschnitt 38 befaßt sich damit, *wie man die vorhergehende Methode einfacher macht,* Leitsatz 40 lautet: *Diese neue Methode könnte in denen Fällen fehlerhaft werden, da A und B verschiedene Zeichen haben,* und Abschnitt 41 befaßt sich mit einem *Fall, in welchem die vorhergehende Methode zu einem Irrthume verleiten könnte,* und sagt ferner, *wie man sich davor in acht nehmen kann.*

Auch im fünften und letzten Teil der "Eléments d'algèbre" treten heuristische Motivationen nur noch selten auf. So befaßt sich Abschnitt 8 mit einem *Fall, in welchem die vorhergehende Formel das x nicht bekannt machen kann, wegen der darinne befindlichen unmöglichen Größen.* Und Abschnitt 20 entwickelt aus der *Unbequemlichkeit bey der im X. §. gezeigten Näherung ... eine andere und in der Ausübung leichtere Methode der allgemeinen Näherung.* Und Abschnitt 22 befaßt sich damit, *wie man die Näherung noch genauer machet.*

Insgesamt läßt sich aber für die "Eléments d'algèbre" - auch unter Einbeziehung der letzten beiden Teile - feststellen, daß sie durchgängig die heuristische Strategie verfolgen, Methoden und Lehrsätze der Algebra nicht deduk-

tiv darzustellen, sondern von konkreten Einzelproblemen zur Lösung, von der Lösung zur ersten Schwierigkeit, von der ersten Schwierigkeit zur allgemeinen Lösung usw. fortzuschreiten. Der Leser entdeckt anhand solcher Lernsequenzen die Methoden der Algebra selbst und versteht so wesentlich besser ihren Sinn und ihren Gebrauch.

2 Die "Eléments" im Spiegel der Meinungen zeitgenössischer und späterer Wissenschaftler

Die Berichte und Meinungen über die "Eléments de géométrie" und über die "Eléments d'algèbre" lassen sich zeitlich in drei große Bereiche einordnen, zum einen zu CLAIRAUTs Lebzeiten vom Erscheinen der Werke im Jahr 1741 bis zu seinem Tod im Jahr 1765, des weiteren die beiden Jahrzehnte nach der Französischen Revolution und schließlich als dritter zeitlicher Bereich die Jahrhundertwende vom 19. zum 20. Jahrhundert[1].

Die Berichte, Erwähnungen und Meinungen über die "Eléments" zu CLAIRAUTs Lebzeiten lassen sich ebenfalls ziemlich gut voneinander unterscheiden, da in den vierziger Jahren des 18. Jahrhunderts die Berichte über die "Eléments", die vor der Akademie gegeben wurden oder in einschlägigen Zeitschriften erschienen, überwogen, während in den nächsten beiden Jahrzehnten bis zu CLAIRAUTs Tod die "Eléments" fast ausschließlich in "Dictionnaires" und "Encyclopédies" erwähnt und beurteilt wurden.

Zur offiziellen Berichterstattung über die "Eléments de géométrie" waren von der "Académie des Sciences" die Akademiemitglieder DE REAUMUR, DE MAIRAN und NICOLE bestimmt. Sie gaben ihren kurzen (etwa halbseitigen) Bericht am 31.8.1740 vor der Akademie ab, in dem sie im wesentlichen nur kurz den Inhalt der vier Teile des Werks umrissen. Ihr Bericht schließt mit den Worten: *Es scheint uns, daß Herr Clairaut, indem er sich vornahm, in diesen Elementen die Geometrie für diejenigen, die sie studieren wollen, einfacher zu gestalten, diese Absicht sehr gut ausgeführt hat* (PROCES-VERBAUX 1740).

---

[1] Die folgende Auflistung der Berichte und Meinungen über die "Eléments" erhebt natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Dieser Bericht war der Anlaß für ein Zertifikat, unterzeichnet vom damaligen "Secrétaire perpétuel" der Akademie, FONTENELLE, in dem es unter anderem heißt: *... die gelehrte Gesellschaft hat befunden, daß dieses Werk es verdient, gedruckt zu werden* (REGISTRES 1740).

Im Oktober 1741, also nach dem offiziellen Erscheinen der "Elêments de géométrie", erschien im "Journal des Sçavans"[1] ein langer, etwa siebenseitiger Bericht über CLAIRAUTs Geometriebuch. Nach einigen Bemerkungen über den Sinn guter Elementarwerke in einer Wissenschaft und über die bisherigen Elementarwerke, die voller Trockenheit und bar jeder Verzierung (*dénué de tout ornement*) seien, heißt es (JOURNAL DES SÇAVANS 1741): *Es mußte ein Mann kommen, der in der höchsten Geometrie vollkommen war, der ihren ganzen Sinn erfaßt hatte, der genügend über seinem Stoff stand, um sie so zu behandeln, als hätte es noch niemals Anfangsgründe der Geometrie gegeben: Aber üblicherweise entschließt sich eben solch ein hervorragender Mann nur sehr schwer dazu, Dinge zu bearbeiten, an denen es nichts mehr zu entdecken gibt; das Erfinden gefällt ihm, und die Anfangsgründe scheinen dazu nicht geeignet zu sein. Herr Clairaut hat uns soeben das Gegenteil bewiesen; man wird angenehm überrascht darüber sein, daß dieser Geometer Anfangsgründe bearbeitet, nachdem er mit seinen eigenen Werken einen so großen Ruf erwarb, und das zu einer Zeit, in der andere junge Leute kaum anfangen zu denken oder wenigstens Geometrie zu studieren. Dieses Mitglied der Akademie, der in den erhabensten Spekulationen versiert ist, bemächtigt die einfachste Geometrie eines neuen Weges und sozusagen eines neuen Aufschwungs ...* Danach folgt eine Zusammenfassung der "Eléments de géométrie", die nicht nur auf die mathematischen Inhalte, sondern auch auf die von CLAIRAUT genannten außermathematischen Herleitungen der mathematischen Erkenntnisse sowie auf die Aufgabenstellungen eingeht. Der Bericht

---

[1] So die damalige Schreibweise.

endet mit der Bemerkung: *Die Darstellungsart der Beweise ist nicht nur geistreich, sondern auch neu; was es auch an Anfangsgründen der Geometrie geben mag, diese hier gleichen keinen, die der Öffentlichkeit präsentiert wurden. Das muß kaum überraschen. Herr Clairaut hat die Anfangsgründe nicht erstellt, um daraus ein Buch zu machen, sondern er wollte den Wunsch erfüllen, daß die Öffentlichkeit die Geometrie mit Leichtigkeit lernen konnte; die gebildeten Geometer werden in diesen Anfangsgründen den Autor der "Recherches sur les courbes à double courbure" wiedererkennen.*

Ebenfalls im Jahr 1741 erschien in der "Histoire de l'Académie Royale des Sciences" ein kurzer Bericht von etwa einer Seite Länge[1]. Der mathematische Inhalt der "Eléments de géométrie" wird hier gar nicht erwähnt, sondern nur die Art und Weise, wie die Mathematik dort dargestellt ist. Bezugnehmend auf die Elementarwerke der Geometrie heißt es in dem Bericht (HARS 1741): *Aber wir kennen kein einziges, dessen Methode darin besteht, von den Anwendungen, dem Gebrauch und den Bedürfnissen zum Theorem oder zum grundlegenden Problem zurückzugehen, und von da aus zu den Axiomen oder ersten Wahrheiten, die die Grundlage der Beweisführung bilden. Nach diesem Plan hat Herr Clairaut dieses Jahr Anfangsgründe der Geometrie der Öffentlichkeit übergeben. Er ist damit ohne Zweifel dem Vorgehen der ersten Erfinder gefolgt.* Und abschließend heißt es: *Die sehr genaue Ausführung des Plans läßt die Vorteile spürbar werden.*

Bereits vor dem Erscheinen der "Eléments de géométrie" berichtete VOLTAIRE in einem Brief an Kronprinz FRIEDRICH von Preußen über CLAIRAUT und die "Eléments". VOLTAIRE vergleicht CLAIRAUT in diesem Brief mit LOCKE (VOLTAIRE 1880, t. 35, S. 346): *Er behandelt die Mathematik, so wie Locke*

---

[1] Die Berichte der "Histoire de l'Académie Royale des Sciences" wurden vom jeweiligen "Secrétaire perpétuel", in diesem Fall also wahrscheinlich von FONTENELLE, verfaßt.

den menschlichen Verstand behandelt hat; er schreibt mit der Methode der Natur, und so wie Locke der Seele in die Situation ihrer Ideen gefolgt ist, folgt er der Geometrie auf dem Weg, den die Menschen eingehalten haben, um die Wahrheiten, die sie brauchten, schrittweise zu entdecken. Es sind also die Bedürfnisse, die die Menschen dazu gebracht haben, zu messen, bei Clairaut die wahren Meister der Mathematik. Das Werk ist noch lange nicht beendet, aber der Anfang scheint mir von größter Einfachheit und folglich sehr nützlich zu sein.

Am 20. Juli 1746 gaben die Akademiemitglieder NICOLE und BOUGUER ihren offiziellen Bericht über die "Eléments d'algèbre" vor der Akademie ab, der in den handschriftlich erhaltenen Sitzungsprotokollen (Procès-Verbaux) der Akademie erhalten ist. In diesem - im Gegensatz zum relativ kurzen Bericht über das Geometriewerk - recht langen, über fünfseitigen Bericht gehen die Berichterstatter nicht nur auf den mathematischen Inhalt, sondern oft auch auf die besondere Darstellungsform ein. So heißt es beispielsweise (PROCES-VERBAUX 1746): *Um immer vom Einfachen zum Komplizierten zu gehen, berücksichtigt Herr Clairaut zunächst, und das mit Recht, nur Zahlengrößen, weil sie sich am besten dazu eignen, die Aufmerksamkeit der Anfänger zu fesseln. Indem er anschließend zeigt, daß sich ein gewisser Teil des Rechenverfahrens immer wiederholt, wenn man mehrere Male die gleiche Aufgabe mit verschiedenen Zahlenannahmen löst, entsteht beim Leser ganz natürlich der Gedanke, daß man diese lange und langweilige Wiederholung vermeiden kann, und die Aufgaben ein für alle Mal lösen kann, indem man die gegebenen Größen nicht durch Zahlen, sondern allgemein durch Buchstaben ausdrückt.* Und an anderer Stelle findet sich ein Hinweis auf CLAIRAUTs Liebe zur Klarheit der Darstellung: *... und er zeigt gleichzeitig mit seiner üblichen Klarheit, daß diese Wurzeln nur gebrochene Potenzen sind.* Dieser Aspekt wird auch im Schlußwort des Berichts unter anderem noch einmal erwähnt: *Dennoch glauben wir, daß unsere Detailvertiefung ausreicht, um zu zeigen, daß Herr*

C... alle Absichten, die er sich vorgenommen haben muß, perfekt erfüllt hat; und daß er uns nicht nur Anfangsgründe der Algebra liefert, die in größter Klarheit geschrieben sind; sondern daß es ihm gelungen ist, mehrere Methoden zu vereinfachen, und uns eine große Anzahl völlig neuer zu liefern, obgleich in einem bereits von einer Unzahl von Autoren behandelten Bereich. Wir kommen somit zu dem Schluß, daß diese Anfangsgründe sicher zum Fortschritt der Mathematik beitragen werden, und daß sie es verdienen, gedruckt zu werden.

Ebenfalls wesentlich länger (etwa vier Seiten) als derjenige über die "Elêments de gêomêtrie" ist der Bericht der "Histoire de l'Académie Royale des Sciences", der 1746 erschien[1]. Dieser Bericht scheint eine nur wenig verkürzte Zusammenfassung des vor der Akademie abgegebenen Berichts von NICOLE und BOUGUER zu sein. Er schließt mit den Worten (HARS 1746): *Die Anfangsgründe, die auf die von uns eben ausgeführte Weise behandelt werden, ersparen den Anfängern unendlich viel Mühe und Verdruß. Man macht sich gemeinhin keine Vorstellung davon, wie meisterhaft man eine Wissenschaft beherrschen muß, um davon Anfangsgründe liefern zu können.*

Nachdem im "Journal des Sçavans" im Dezember 1746 das Erscheinen der "Elêments d'algèbre" nur erwähnt worden war, erschien im Februar 1747 in dieser Zeitschrift ein ausführlicher, etwa zehnseitiger Bericht über dieses Werk. Zu Beginn des Berichts heißt es über die Algebra im allgemeinen und über ihre Darstellung (JOURNAL DES SÇAVANS 1747): *Einst schien die Algebra unzugänglich zu sein, und man pflegte sich sogar über das bloße Wort zu erschrecken; heute denkt man anders; verschiedene Autoren haben diese Wissenschaft sehr vereinfacht, indem sie sie von einer Unzahl nutzloser Zeichen und Merkmale befreiten; außerdem*

---

[1] Dieser Bericht wurde wahrscheinlich vom damaligen "Secrêtaire perpêtuel", DE FOUCHY, verfaßt.

haben sie die Methoden erhellt, die einfach ohne Begründung da waren; mehrere haben dem neue, allgemeinere und leichtere hinzugefügt: Schließlich dachte man dem gegenüber anders, und man erkannte die ganze Nützlichkeit der Algebra; aber Ordnung und Klarheit fehlte mehreren Autoren, die trotz ihres verdienten Rufs nicht genug Geschick besaßen, um sich den Anfängern verständlich zu machen. Herr Clairaut hat gut erkannt, daß man die Kraft des Geistes und des Scharfsinns benötigt, um die erhabenen Wahrheiten zu entdecken, daß viel Methode und Klarheit notwendig ist, um sie verständlich zu machen; sein Wunsch, nützlich zu sein, hat ihn veranlaßt, uns neue Anfangsgründe der Algebra zu liefern. Danach folgt eine ausführliche Zusammenfassung nicht nur des mathematischen Inhalts, sondern insbesondere auch der Darstellungsform.

Im Januar 1747 erschien im "Mercure suisse" ein Brief von Daniel BERNOULLI an GARCIN, in dem es heißt (CLAIRAUT 1752)[1]: *Die Anfangsgründe der Algebra des Herrn Clairaut, welcher, wie Sie wissen, eine von den Zierden der Akademie der Wissenschaften zu Paris ist, sind endlich herausgekommen. Der Name des Verfassers, und die Anfangsgründe der Geometrie, welche wir, in eben dem Geschmack, wie das Werk, welches ich Ihnen ankündige, von ihm haben, hatten gemacht, daß man es mit Ungedult erwartete. Obgleich der Titel dieses Buchs nichts neues zu versprechen scheinet: so kann man doch sagen, daß die von dem Verfasser beobachtete Lehrart ihm alles Ansehen der Neuheit giebt. Denn er hat ein Mittel gefunden, den Leser, so zu sagen, von sich selbst Sachen erfinden zu lassen, welche er aus anderen Büchern zu begreifen, Mühe genug gehabt haben würde. Man hatte, besonders im Französischen, eine Abhandlung von der Algebra sehr nöthig, welche nach einer gewissen Lehrart, deutlich, und nicht allzuweitläuftig, auch nicht allzu kurz, abgefasset wäre. Diese, von welcher ich Ihnen itzo sage, hat alle diese Eigenschaften, und man muß dem Verfasser derselben desto mehr dafür verbunden seyn, da es den Mathematikern vom ersten Range, welche sich an erhabene*

[1] Zitiert in der "Vorrede des Uebersetzers".

Betrachtungen gewöhnet haben, gemeiniglich schwer fällt, sich mit Anfangsgründen zu beschäftigen, und zum Nutzen der Anfänger zu arbeiten. Vielleicht bilden sie sich auch fälschlich ein, es wäre weniger Ehre dabey, an den Anfangsgründen der Wissenschaften zu arbeiten, so grossen Vortheil auch die Welt davon haben kann, als seine Scharfsinnigkeit durch erhabnere Entdeckungen zu zeigen; und vielleicht sind sie, wegen dieser falschen Meynung, nicht großmüthig genug, ihre Eigenliebe dem gemeinen Nutzen aufzuopfern. Daher kömmt es zum Exempel, daß die allgemeine Rechenkunst des Herrn Newton, welche, dem Ansehen nach, ein Schulbuch seyn soll, lange noch nicht von Schülern verstanden werden kann, indem diejenigen, welche sie ihnen erklären sollen, selbst Mühe haben, sie zu verstehen, und es scheinet, als ob Herr Newton, so gar auch in diesen Anfangsgründen, mehr zur Absicht gehabt habe, bewundert, als verstanden zu werden. Herr Clairaut begnüget sich nicht nur, das, was Herr Newton in eine große Dunkelheit eingehüllet hatte, auf eine sehr leichte Art zu erklären und deutlich zu machen; sondern er füget auch die Beweise hinzu, welche dieser zu unterdrücken pflegte. Kurz, damit ich Ihnen meine Meynung von dem Buche des Herrn Clairaut mit zwey Worten sage, ich finde, daß dieses Werk, ob es gleich nur die ersten Anfangsgründe enthält, gleichwohl seinem Verfasser nicht weniger Ehre macht, als seine anderen Schriften, welche ihm mit größtem Rechte den Ruhm eines der geschicktesten Mathematikverständigen unserer Zeit erworben haben, und ich gestehe Ihnen, daß ich es so sehr nach meinem Geschmacke zu seyn befinde, daß ich wollte, daß es jedermann bekannt und von jedermann gelesen würde.

In den Jahren ab 1751 bis 1780 erschien die berühmte "Encyclopédie" von DIDEROT und D'ALEMBERT, auf die ich in Kapitel 4 noch näher eingehen werde. Bereits im ersten Band, der 1751 erschien, wurden CLAIRAUTs "Eléments d'algèbre" in den Artikeln "Algèbre" und "Arithmétique" erwähnt, wenn auch nur äußerst beiläufig, wenn nicht sogar - zumindest zwischen den Zeilen - in geringschätziger Art

und Weise. So heißt es im Artikel "Algèbre" (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751): *Das "Traité de la grandeur" von P. Lamy de l'Oratoire; der erste Band der "Analyse démontrée" von P. Reyneau und die "Science du calcul" desselben Autors sind auch Werke, anhand derer man sich in Algebra schulen kann: Schließlich hat Herr Saunderson, Professor der Mathematik in Cambridge und Mitglied der Royal Society in London, eine ausgezeichnete Abhandlung über diesen Stoff in Englisch & in zwei Bänden in-4° veröffentlicht, die den Titel "Elemens d'Algebre" trägt. Wir haben auch Anfangsgründe der Algebra von Herrn Clairaut, die durch den Ruf des Autors ihren Erfolg und Verdienst sichern.* Und im Artikel "Arithmêtique" heißt es: *Herr Newton hat uns über die Algebra ein exzellentes Werk mit dem Titel "Arithmetica universalis" geliefert. Er behandelt darin die Regeln dieser Wissenschaft und ihre Anwendung auf die Geometrie. Er liefert dort mehrere neue Methoden, die zum größten Teil von Herrn s'Gravesande in einem kleinen, den Anfängern sehr nützlichen Werk mit dem Titel "Elementa algebrae", und von Herrn Clairaut in seinen Anfangsgründen der Algebra kommentiert wurden. ...*
Wir glauben, daß das Werk von Herrn s'Gravesande, das von P. Lamy, die "Science du calcul" von P. Reyneau, die "Analyse démontrée" des gleichen Autors und die "Algèbre" von Saunderson, in Englisch veröffentlicht, die Werke dieser Gattung sind, von denen die jungen Leute am meisten profitieren können; obwohl in mehreren dieser Abhandlungen, und vielleicht in allen, viele Dinge zu wünschen übrig bleiben.

Im Band 5 der "Encyclopédie" findet sich ein langer, siebenseitiger Artikel über die "Elémens des Sciences". Auf die im Artikel gestellte Frage: *Zunächst, muß man, wenn man die Anfangsgründe behandelt, der Ordnung folgen, der die Erfinder gefolgt sind?* heißt es weiter als Antwort (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751-80): *Es ist zunächst offensichtlich, daß es sich hier nicht um die Ordnung handelt, der die Erfinder wirklich gefolgt sind, und die regellos und manch-*

mal gegenstandslos war, sondern um diejenige, der sie hätten folgen können, wenn sie mit Methode vorgegangen wären. Man kann nicht daran zweifeln, daß diese Ordnung im allgemeinen am vorteilhaftesten zu verfolgen ist; denn sie stimmt mit dem Vorgehen des Geistes am besten überein, sie klärt auf, indem sie schult, sie führt auf den weiterführenden Weg, und sie läßt sozusagen auf jeden Schritt den ihm folgenden ahnen: das nennt man sonst "Analytische Methode", die von den zusammengesetztesten Ideen zu den abstrakten führt, die von bekannten Schlußfolgerungen zu unbekannten Prinzipien aufsteigt, zu denen sie gelangt, indem sie erstere verallgemeinert; aber diese Methode muß noch die Einfachheit und die Klarheit vereinen, die wesentlichsten Qualitäten der Anfangsgründe einer Wissenschaft. Man muß sich besonders davor hüten, Behauptungen, die bewiesen werden müssen, unter dem Vorwand als wahr anzunehmen, man verfolge die Methode der Erfinder, die mit der Kraft ihres Genies auf einen Blick die Richtigkeit dieser Behauptungen erkannt haben müssen. Man kann die Wissenschaften gar nicht zu exakt abhandeln, besonders jene nicht, die sich eigens "exakt" nennen. Anschließend wird die "méthode synthétique" erläutert, von der abschließend gesagt wird: *Die synthetische Methode eignet sich mehr dazu, die gefundenen Wahrheiten zu erklären und verständlich zu machen ...* So ist es nicht verwunderlich, daß zwei Seiten weiter die "Eléments de géométrie" von CLAIRAUT so kommentiert werden: *... aber abgesehen davon, daß der Autor dort manchmal ohne Beweis Behauptungen annimmt, die strenggenommen eines Beweises bedürften, werden die Sätze, wie bei allen anderen Methoden auch, nicht unmittelbar aus den jeweils vorhergehenden gefolgert, und bilden eher ein Fugenwerk als ein Beweisgebäude ...*
Und zu den "Eléments d'algèbre" heißt es: *Es wäre wünschenswert, daß Herr Clairaut in seinen ausgezeichneten Anfangsgründen der Algebra, die er veröffentlicht hat, die Rechenverfahren den Anfängern zugänglicher gemacht hätte.*

Diese offensichtliche teilweise Geringschätzung der Lehr-

bücher von CLAIRAUT, die so stark von den anderen Urteilen zu seinen Lebzeiten abweicht, erklärt sich leicht, wenn man erfährt, daß die Artikel "Algèbre" und "Arithmétique" von D'ALEMBERT verfaßt sind, und der Artikel "Elémens des Sciences" zum größten Teil von ihm stammt, bis auf die oben zitierte direkte Erwähnung der Lehrbücher von CLAIRAUT. Dieser kurze Einschub im Artikel stammt vom Abbé de LA CHAPELLE. Denn CLAIRAUT und D'ALEMBERT hatten nicht nur grundsätzlich unterschiedliche Ansichten in methodischer Hinsicht, sie waren überdies persönlich verfeindet. Auf diese Feindschaft werde ich in Kapitel 3 noch näher eingehen.

Auf D'ALEMBERTs Subjektivität gegenüber anderen Mathematikern weist R. TATON in einer Abhandlung über die "Encyclopédie" anhand dessen Verhältnisses zu EULER hin (TATON 1951, S. 264-265): *Die beachtliche Stellung, die Euler seit über zwanzig Jahren im Fortschritt der Mathematik und in der Vereinigung ihrer Hauptzweige eingenommen hatte, rechtfertigte häufige Zitate und Bezüge. Ohne daß d'Alembert den Beitrag seines großen Rivalen völlig verkennt, bagatellisiert oder übergeht er ihn viel zu oft stillschweigend ... um so mehr, als d'Alembert es nie versäumt, Euler zu zitieren, wenn er glaubt, daß jener einen Irrtum begangen oder eine wissenschaftliche Abhandlung ohne Interesse veröffentlicht hat (Beispiel: schwingende Saiten, imaginäre Zahlen, Logarithmen usw.).* Und an anderer Stelle heißt es (TATON 1951, S. 258): *Ein wenig geblendet durch die mehr oder weniger zugegebene Rivalität, die ihn Euler gegenüberstellte, fehlte d'Alembert, dem "Prinzen der Mathematik" jener Epoche, ziemlich oft Scharfsinn in seinen Ansichten über den Sinn der Entwicklung der reinen Mathematik.*

Im Gegensatz zur negativen Sichtweise der "Encyclopédie" erwähnt SAVERIEN 1753 in seinem "Dictionnaire Universel de Mathematique et de Physique" im Artikel "Algébre" CLAIRAUT neben DIOPHANT, FERMAT, DESCARTES und NEWTON, um nur wenige seiner Aufzählung zu nennen, als einen der

berühmtesten Autoren über die Algebra.

Im Artikel "Elémens" zählt SAVERIEN die wichtigsten Elementarwerke der Mathematik auf (SAVERIEN 1753): *Desgleichen sind (um hier nur von den wesentlichsten zu sprechen) die "Elémens Mathématique" von P. Prestet, die der Algebra von Herrn Clairaut, die "Elémens de Physique" von s'Gravesande, die der Astronomie von Herrn de Cassini. Und schließlich die "Elémenta Matheseos universae" von Herrn Wolf und die "Elém. généraux des Math." von Abbé Deidier.*

Und im Artikel "Géométrie" hält er die "Eléments de géométrie" von CLAIRAUT für das beste geometrische Elementarwerk jener Zeit (SAVERIEN 1753): *Die meistgeschätzten Elemente (für die Anfänger) sind heute die "Elemente des Euklid" von Deschalles, korrigiert von Ozanam; die des Herrn Arnauld, der der scholastischen Methode gefolgt ist; die von P. Bern. Lami; von Herrn Malezieu und von Herrn Clairaut. Dies sind sehr einfache Elemente der Geometrie wie die des letztgenannten Mathematikers. Die Prinzipien dieser Wissenschaft werden dort mit der gleichen Methode entwickelt, die sie wahrscheinlich entstehen ließ. Der Geist wird, dem Fortschreiten der Kenntnisse folgend, von den einfachsten und natürlichsten Gegenständen zu denen geführt, die dies weniger sind. Man lernt nichts, was man nicht zu lernen gewünscht hätte. Das, was eine Wahrheit dem Geist über die, die ihr folgen muß, anzukündigen scheint, ist in den "Elémens de Géométrie" von Herrn Clairaut richtig plaziert, gemäß ihrer Ordnung. Und diese Methode ist sicher die wahre, um eine Wissenschaft schmackhaft zu machen; um ihr Studium angenehm und interessant zu gestalten und um die Erfolge soweit wie möglich zu beschleunigen. Nach diesen Elementen finde ich nichts Besseres als die "Elemente des Euklid", herausgegeben von P. Deschalles, nachgesehen und korrigiert von Herrn Ozanam, wo alles mit äußerster Genauigkeit bewiesen ist. Dadurch kann man sich an die geometrischen Beweise gewöhnen, bei denen der Starrköpfigste gezwungen ist, die Waffen zu strecken, noch bevor er sie gebraucht hat.*

MONTUCLA vergleicht 1758 in seiner "Histoire des Mathématiques" CLAIRAUTs Algebrawerk mit NEWTONs "Arithmétique universelle": *Wir zitieren schließlich die "Elémens d'Algèbre" von Herrn Clairaut: Dieses Werk, das wir wegen seines geringen Umfangs und der Vortrefflichkeit der Dinge am besten mit der "Arithmétique universelle" von Newton vergleichen können, verdient es, all denen empfohlen zu werden, die, mit leichter Auffassungsgabe begabt, gründliche Fortschritte in der Algebra machen wollen, und sich bald mit ihren größten Schwierigkeiten vertraut machen möchten* (MONTUCLA 1758, t. II, S. 155).

Ein Hinweis auf die Elementarwerke von CLAIRAUT aus den siebziger Jahren des 18. Jahrhunderts leitet bereits zum zweiten zeitlichen Bereich über, den zwei Jahrzehnten nach der Französischen Revolution. VOLTAIRE schreibt in seinem erstmalig 1764 erschienenen "Dictionnaire philosophique" im Artikel "Géométrie" (VOLTAIRE 1878): *Der verstorbene Herr Clairaut nahm sich vor, die jungen Leute die Grundlagen der Geometrie leicht lernen zu lassen; er wollte zur Quelle zurückkehren und dem Weg unserer Entdeckungen und unserer Bedürfnisse folgen, die jene hervorgebracht haben. Diese Methode schien annehmbar und nützlich zu sein; aber man folgte ihr nicht: Sie erfordert im Lehrer eine Flexibilität des Geistes, der sich den jeweiligen Bedingungen anpassen kann, und eine seltene Anmut in jenen, die der Routine ihres Berufs nachgehen.*

Und ohne die "Eléments" von CLAIRAUT explizit zu erwähnen, beschreibt BOSSUT im "Discours préliminaire" seines "Traité élémentaire d'algèbre" die Nachteile der CLAIRAUTschen Darstellungsform (BOSSUT 1773, S. xxix): *Einige Autoren haben sich vorgenommen, in ihren Werken dem Vorgehen der Erfinder zu folgen, d.h. die Lehrsätze zu erklären, wie sie gefunden wurden, oder wie sie nach und nach gefunden werden konnten. Aber diese Methode, die den Vorteil besitzt, zunächst die Neugier zu wecken, kann nicht lange befolgt werden; und wenn die Wahrheiten schwieriger werden, ist man verpflichtet, sie aufzugeben, um Lang-*

wierigkeiten zu vermeiden. Da der menschliche Geist von Natur aus beschränkt ist, wird er fast nie ein Ziel auf dem kürzesten Weg erreichen; gewöhnlich schleppt er sich langsam und auf Umwegen dorthin, über die man selbst erstaunt ist, wenn man anschließend dazu kommt, den wirklichen Abstand, der zwei Beweise trennt, mit dem Raum zu vergleichen, den man durchschritten hat, um die beiden zu verbinden. Übrigens wächst eine Wissenschaft oft nur anläßlich einer anderen: Es gibt so manche algebraische Untersuchung, die ihren Ursprung einer Frage der Geometrie oder der Mechanik verdankt. Es ist folglich nicht möglich, genau dem Vorgehen der Erfinder zu folgen, ohne stellenweise auf den Verdienst der Präzision, der Eleganz und sogar der Klarheit zu verzichten. Wenn Sie mit dieser Methode beginnen und sie dann zugunsten einer anderen aufgeben, nehmen Sie Ihrem Werk die Einheit. Es wäre zweifellos besser gewesen, mit einem Mal ein System anzunehmen, in dem sich Wahrheiten gleichmäßig, einfach und klar steigerten.

Dieselben Nachteile erwähnt LEGENDRE 1794 im Vorwort seiner "Eléments de géométrie", ebenfalls, ohne CLAIRAUT und seine Werke zu nennen. Und im Jahr 1801, anläßlich der sechsten Auflage der "Elêments d'algèbre" von CLAIRAUT, beschreibt THEVENEAU in der "Introduction" zur "Addition à la première partie" die Hauptfehler der CLAIRAUTschen Methode (CLAIRAUT 1801 a, S. 11-12): *Das vom Autor erdachte Vorgehen ist unter dem zweifachen Aspekt der Ordnung und der Klarheit sicher empfehlenswert, aber man kann nicht verhehlen, daß ihn dieser Weg oft zu zwei beträchtlichen Fehlern führt, nämlich zur Weitschweifigkeit, sei es im theoretischen, sei es im praktischen Teil des Werks, und zu einer zu großen Isolierung bei den verschiedenen Teilen der allgemeinen Regeln; und man wird mühelos glauben, daß es nicht anders sein kann, wenn man überlegt, daß Clairaut, indem er sich der Verfolgung des langen, beschwerlichen Weges der Erfinder unterzog, sich der Gefahr ausgesetzt sehen mußte, sich einerseits oft zu wiederholen, anderer-*

seits die besonderen Beispiele, auf die er sich stützen wollte, weiträumig auszubreiten, um die Regeln verallgemeinern zu dürfen.

In diesem Werk existieren noch zwei nicht weniger wesentliche Fehler: zunächst der, daß er beim Leser Kenntnisse in Arithmetik voraussetzt, die eher zum Bereich der Algebra gehören. Von dieser Art sind die Proportionen, die arithmetischen Reihen und die Wurzeln, seien sie quadratisch oder kubisch, Bereiche, über die er nicht spricht, oder über die er nur kurze Anmerkungen gibt, die sogar oft nur reine Definitionen sind. Aber dieser Fehler kann nicht Clairauts Vorgehen zur Last gelegt werden; man muß bedenken, daß er in einer Epoche lebte, in der man weit davon entfernt war, die Grenzen zu bestimmen, die auf natürliche Weise die Arithmetik von der Algebra trennen müssen; denjenigen, die wissen, seit wie kurzer Zeit diese Grenzen erst in einmütiger Übereinstimmung gesteckt zu sein scheinen, wird dies kaum erstaunlich vorkommen. Wir werden gleich darauf zurückkommen.

Der zweite und gleichzeitig größte Fehler von allen besteht darin, daß der Autor in sein Werk zu wenig all das eingeschlossen hat, was die Algebra an Interessantem und Nützlichem anbieten kann. Hier sind es Theorien, die bei weitem nicht komplett sind; dort sind es Teile, die noch nicht einmal genügend entwickelt sind. Schließlich gibt es eine Menge Themen, über die er gar nicht gesprochen hat; darunter fallen besonders die Theorien der Proportionen und der Reihen, sowohl arithmetisch als auch geometrisch, die der Logarithmen, die Methode der unbestimmten Koeffizienten, die rekursiven Reihen, die unbestimmte Analysis, die Lösung von Gleichungen, entweder anhand der Wurzelfunktionen oder durch Approximation, die Kettenbrüche usw. Aber die beiden Fehler, von denen wir eben sprachen, dürfen dem Autor nicht mehr zugeschrieben werden, nur die zwei ersten; man muß dafür wiederum die damalige Zeit verantwortlich machen, zu der die meisten der vorangegangenen Theorien noch nicht einmal bekannt waren.

LACROIX vergleicht 1805 in seinem "Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier" die von CLAIRAUT intendierte Lehrweise mit dem Unterricht des Emile im gleichnamigen Roman von ROUSSEAU, geht aber gleichzeitig auf die Schwächen dieser Darstellungsform ein: *Die nach der Methode der Erfinder angeordneten Anfangsgründe der Geometrie von Clairaut sind am geeignetsten, den Lehrer in dieser Situation zu führen, denn man braucht kein Buch für den Schüler; und es scheint mir fast unmöglich, für den ersten Jahrgang, welcher Wissenschaft auch immer, eines zu verfassen. Der Mangel an Strenge bei den Beweisen und der geringe Umfang dieses Werks ließen es zweifellos nicht zu, daß es klassisch wurde; aber gerade durch diese Lücken, die im Hinblick auf die Schüler, deren Verstand bereits ausgebildet ist, Nachteile in sich bergen, paßt es zur Kindheit, die die Wahrheit zunächst nur sozusagen durch das Gefühl aufnimmt, so daß zu metaphysische Ideen bei den ersten Schritten abstoßen würden* (S. 344).

Und im selben "Essais sur l'enseignement" beschreibt LACROIX die Nachteile der "Eléments d'algèbre" und gibt gleichzeitig einen geschichtlichen Überblick über die Entwicklung der Didaktik seit CLAIRAUT: *Clairaut war der erste, der, indem er sich einen philosophischen Weg bahnte, lebendiges Licht über die Prinzipien der Algebra breitete. Die Leser nehmen in seinem Werk gewissermaßen an der Erfindung der Wissenschaft teil; schon bei den ersten Schritten erfassen sie den Gegenstand und fragen sich nicht mehr, was diese mysteriösen Symbole zu bedeuten haben, die nur durch eine Art Magie zu den oft unverständlichen Lösungen zu führen scheinen. Alles wird erhellt, alles wird angewendet; es wird nichts eingeführt, was nicht notwendig wäre, oder was sich nicht aus dem Vorhergehenden ergäbe. Seine Anfangsgründe der Algebra erhielten zunächst den verdienten Erfolg; und wenn er das Vorgehen der Erfinder, das er sich zu eigen machte, auf richtige Grenzen beschränkt hätte, hätte er sich zweifelsohne gegen alle anderen durchgesetzt. Aber wenn man dieses Vorgehen,*

das zur Aufklärung und Ermutigung derer notwendig ist, die das Algebrastudium beginnen, über die ersten Anmerkungen hinaus streng verfolgt, wird es sehr minutiös und mit Details beladen. Auch waren die letzten Teile dieses Buchs nicht so geschätzt wie der erste: Man glaubte sogar zu erkennen, daß die Grundregeln der Algebra nicht genug herausgestellt wurden; durch die Ausbreitung der einzelnen Beispiele kam es oft vor, daß die jungen Leute, nachdem sie allen Rechenverfahren des Autors vollkommen gefolgt waren, noch viele Schwierigkeiten verspürten, wenn sie eigenständig ähnliches ausführen wollten. Anstatt zu versuchen, diese Nachteile zu beseitigen, die leicht hätten ausgeräumt werden können, was ein ebenso erfreuliches Vorhaben wie das von Clairaut gewesen wäre, gab man sie völlig auf, um zu der ehemaligen Einführungsweise der Anfangsgründe der Algebra zurückzukehren; und unter diesem Gesichtspunkt machte die Wissenschaft Rückschritte. Trotz der vielfachen und fruchtbaren Forschungen Eulers, Warings und Lagranges über die Theorie der Gleichungen brachten die zahlreichen Ausgaben der Bücher, die dem von Clairaut folgten, fast nichts Neues (S. 280).

Der dritte zeitliche Bereich, die Wende zum 20. Jahrhundert, ist gekennzeichnet von einer gewissen Renaissance der CLAIRAUTschen Ideen. MARIE schreibt 1886 in seiner "Histoire des Sciences mathématiques et physiques" über CLAIRAUTs Geometriewerk[1] (MARIE 1886, S. 154-155): *In diesem - übrigens kompletten - Werk vermeidet Clairaut nicht nur den pedantischen Apparat der Divisionen, genannt Theoreme, Probleme, Korollare und Scholien, sondern er sucht so selten wie möglich Zuflucht in der abstrakten Form des syllogistischen Urteils. Die Rede setzt sich dort wie in allen Abhandlungen, die verschieden sind von denen der Geometrie, fort, und die Wahrheiten verketten sich dort*

[1] Der erste Abschnitt dieses Zitats stimmt wörtlich mit dem letzten Abschnitt des Artikels "Elêments de géométrie" im "Grand Dictionnaire Universel du XIX^{e} Siècle" von Pierre LAROUSSE, Paris 1866, überein.

auf natürliche Weise durch das gemeinsame Ziel, dem sie in allen Teilen des Werks entgegengehen. ... Clairauts Methode stellte sicherlich einen Fortschritt dar, aber es war sehr schwierig, daß sie sich gleichzeitig gegen angenommene Gewohnheiten, gegen die Trägheit des Schülergeistes und gegen die Gleichgültigkeit der Lehrer durchsetzte. Seine "Geometrie" erntete in der Tat keinen großen Erfolg. Wir haben von ihm auch die "Anfangsgründe der Algebra" (1746), die sich durch den gleichen Verdienst auszeichnen, und eine Theorie über die Bewegung der Kometen (1760).

Im Jahr 1907 druckte "La Revue de l'Enseignement des Sciences" das Vorwort der "Eléments de géométrie" von CLAIRAUT ungekürzt ab und wies gleichzeitig auf die derzeitige Reform des Geometrieunterrichts hin. In der kurzen Einleitung zum Vorwort heißt es (LA REVUE 1907, S. 181): *Dieses Werk verdiente es wirklich, wieder gedruckt zu werden. Wie das Vorwort, welches wir veröffentlichen, andeutet, enthält es eine Darstellung der Geometrie, bei der der Teil der verbalen Logik auf ein Minimum reduziert ist, wo häufig an die Intuition und die Erfahrung appelliert wird; es ist eine natürliche Darstellung, eher induktiv als deduktiv, die die Geometrie mittels der Methode der Wiederentdeckung aufbaut. Unsere Leser werden in diesem Vorwort Ideen finden, die zum Teil die aktuelle Reformbewegung des Geometrieunterrichts anregen.* Der im Jahr 1907 geäußerte Wunsch, die "Eléments de géométrie" neu aufzulegen, führte 1920 zur vorerst letzten Auflage des Geometriebuchs, zu (CLAIRAUT 1920).

Wie aus den vorhergehenden Zitatstellen ersichtlich ist, stimmten die Meinungen über CLAIRAUTs Lehrbücher "Eléments de géométrie" und "Eléments d'algèbre" nicht in allen drei großen zeitlichen Bereichen überein, innerhalb eines zeitlichen Abschnitts aber folgten die Meinungen jeweils einem einheitlichen Trend, der zu CLAIRAUTs Lebzeiten zu einer positiven, zur Zeit der Französischen Revolution zu einer eher negativen und um die Jahrhundertwende vom

19. zum 20. Jahrhundert wiederum zu einer positiven Beurteilung führte.

Die Meinungen zu CLAIRAUTs Lebzeiten - bis auf die D'ALEMBERTs - waren durchweg positiv. (Wie bereits erwähnt, läßt sich die negative Haltung D'ALEMBERTs erklären mit der Feindschaft, die zwischen ihm und CLAIRAUT herrschte.) In den handschriftlichen Sitzungsprotokollen der "Académie Royale des Sciences" wurden die Lehrbücher mit großem Lob bedacht, ebenso in der Zeitschrift "Journal des Sçavans" und in den Berichten der "Histoire de l'Académie Royale des Sciences". Nicht nur Mathematikerkollegen CLAIRAUTs wie Daniel BERNOULLI und SAVERIEN sowie MONTUCLA in seiner "Histoire des Mathématiques" standen den Werken positiv gegenüber, sondern auch führende Denker der französischen "Aufklärung", insbesondere VOLTAIRE und die Enzyklopädisten außer D'ALEMBERT.

Mit dem Herannahen der Französischen Revolution wendete sich die Beurteilung der CLAIRAUTschen Lehrbücher zum Negativen. BOSSUT, LEGENDRE, THEVENEAU und LACROIX konzentrieren sich im wesentlichen auf einen Hauptkritikpunkt: die Langatmigkeit und die Umständlichkeit der CLAIRAUTschen Darstellungsform. Diese Kritik führte dazu, daß CLAIRAUTs Lehrbücher entweder gar nicht mehr oder nur stark überarbeitet benutzt wurden.

Eine nochmalige Wende in der Beurteilung der Lehrbücher ergab sich schließlich um die Jahrhundertwende vom 19. zum 20. Jahrhundert, insbesondere im Zuge einer Reform des Geometrieunterrichts in Frankreich zu jener Zeit (die übrigens parallel zu den Bemühungen F. KLEINs in Deutschland lief und die in Frankreich von POINCARE mitgetragen wurde).

Darauf, daß CLAIRAUTs Darstellungsform auch heute in Frankreich noch nicht vergessen ist, weist im übrigen unter anderem der in der Einleitung erwähnte Artikel "Au pays de Clairaut et de Bourbaki" von G. WALUSINSKI aus dem Jahr 1957 hin.

3 Alexis-Claude Clairaut: sein Leben, seine Werke, seine Zeitgenossen

Alexis-Claude CLAIRAUT wurde am 13. Mai 1713 in Paris geboren[1]. Er war das zweite von 21 Kindern des Mathematiklehrers Jean-Baptiste CLAIRAUT und seiner Ehefrau Catherine PETIT. Jean-Baptiste CLAIRAUT war korrespondierendes Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften.

Der junge Alexis-Claude war ein mathematisches Wunderkind. Nachdem er die Buchstaben des Alphabets anhand der Figuren in den "Elementen" des EUKLID kennengelernt hatte, konnte er mit vier Jahren lesen und ziemlich gut schreiben. Die geometrischen Figuren hatten in Alexis-Claude das Interesse für Mathematik geweckt, und im Alter von neun Jahren gab ihm sein Vater die "Application de l'algèbre à la géométrie" von GUISNEE, erschienen im Jahr 1705, zu lesen. Bei der ersten Lektüre half ihm sein Vater noch, aber Alexis-Claude las das Werk noch mehrere Male ohne Hilfe, wobei er einen Großteil der im Buch gestellten Probleme auf einfachere und elegantere Weise löste als der Autor selbst. Mit zehn Jahren studierte er die "Sections coniques" sowie die "Analyse des infiniment petits" des Marquis DE L'HÔPITAL.

Bis zu diesem Zeitpunkt war Alexis-Claudes frühe Begabung nur seiner Familie und einigen Freunden bekannt. Im selben Haus wie die Familie CLAIRAUT wohnte aber zufällig Philippe NERICAULT DES TOUCHES, der Alexis-Claude einigen Mitgliedern der "Académie des Sciences" vorstellte. Dieses Aufmerksamwerden auf ihn spornte Alexis-Claude stark an, und insgeheim beschäftigte er sich mit einem Aufsatz über vier spezielle Kurven, die er entdeckt hatte. Er wollte diese Ar-

---

[1] Die Angaben über CLAIRAUTs Leben sind im wesentlichen - soweit nicht anders angegeben - entnommen aus "La Vie et l'Oeuvre de Clairaut (1713-1765)" von Pierre BRUNET (BRUNET 1952).

beit erst zeigen, wenn sie ganz fertig wäre, wurde aber dabei von seinem Vater überrascht, der ihm jede weitere Beschäftigung damit verbot. Um seinen Sohn aber nicht ganz um die Früchte seiner Arbeit zu bringen, präsentierte Jean-Baptiste CLAIRAUT den Aufsatz der Akademie. Zunächst zweifelten die Akademiemitglieder, daß eine solche Arbeit von einem Kind wie Alexis-Claude geschrieben worden sein konnte. Diese Zweifel wurden jedoch dadurch ausgeräumt, daß der junge Alexis-Claude jede Frage beantworten konnte, die ihm bezüglich des Aufsatzes gestellt wurde, so daß die Mitglieder der Akademie voll des Lobes und der Bewunderung waren. Zu diesem Zeitpunkt war Alexis-Claude wenig mehr als zwölf Jahre alt.

Veröffentlicht wurde der eben erwähnte Aufsatz erst im Jahr 1734 unter dem Titel "Quatre problèmes sur de nouvelles courbes" in den "Miscellanea Berolinensia".

Um 1726 gründete CLAIRAUT zusammen mit Jean-Paul DE GUA DE MALVES, der erst vierzehn Jahre alt war, mit dem neunzehnjährigen Jean Paul GRANDJEAN DE FOUCHY, dem fünfundzwanzigjährigen Charles Marie DE LA CONDAMINE, dem sechsundzwanzigjährigen Jean-Antoine NOLLET und einigen anderen die "Société des Arts". Sie hatte nur für wenige Jahre Bestand, diente aber ihren jungen Mitgliedern als gute Vorbereitung für die "Académie des Sciences" (GILLISPIE 1971, Bd. 3, S. 281).

CLAIRAUTs erstes veröffentlichtes Werk "Recherches sur les courbes à double courbure" erschien im Jahr 1731, obwohl es bereits 1729 fertiggestellt und der Akademie präsentiert worden war. Wieder waren die Mitglieder der Akademie voller Zweifel, daß ein derartig tiefschürfendes Werk von 122 Seiten Umfang von einem Sechzehnjährigen verfaßt worden sein konnte. Der Veröffentlichung beigefügt war daher eine Bescheinigung der Akademie, *... in der ausdrücklich die zur Vergewisserung getroffenen Vorsichtsmaßnahmen darüber erwähnt wurden, daß der Autor kaum sechzehn Jahre alt war ... Dieses Zertifikat, am 23. August 1729 vom Ständigen*

Sekretär Fontenelle unterzeichnet, ist ein Auszug aus den "Registres" der Akademie vom 20. August; es ist dort vermerkt, daß das Werk von Dortous de Mairan und von Nicole untersucht wurde. Privat de Molières, der von der Garde des Sceaux beauftragt war, das Manuskript zu lesen, zögerte nicht mit der Bestätigung (am 3. Juli 1730), daß es "nicht nur verdiente, gedruckt zu werden, sondern als ein Geniestreich der geistigen Fassungskraft und Fähigkeit bewundert zu werden" (BRUNET 1952, S. 5).

Mit diesem ausgezeichneten Werk hatte CLAIRAUT die allgemeine Wertschätzung der "Académie des Sciences" gewonnen, die sehr daran interessiert war, ihn zu ihrem Mitglied zu machen. Dafür gab es allerdings ein Hindernis: Das Mindestalter eines Akademiemitglieds war auf zwanzig Jahre festgelegt (CLAIRAUT war zu diesem Zeitpunkt 18 Jahre alt). *Dennoch wurde er durch eine Befreiung von der Altersgrenze, die zu seinen Gunsten erbeten und auf das Gutachten des Comte de Maurepas hin vom König erlassen wurde, am 14. Juli 1731 in die gelehrte Versammlung aufgenommen, obwohl er erst 18 Jahre alt war"* (BRUNET 1952, S. 8). Die Bemerkung des damaligen Ständigen Sekretärs der Akademie: *Eine bis heute einmalige Ausnahme* gilt auch in unseren Tagen, nach weiteren 250 Jahren, noch.

Die Freude über diese hohe wissenschaftliche Auszeichnung wurde überschattet durch den Tod des drei Jahre jüngeren Bruders von Alexis-Claude, der mathematisch ebenfalls hoch begabt war und der bereits mit fünfzehn Jahren ein "Traité des quadratures circulaires et hyperboliques" veröffentlicht hatte.

In den ersten Jahren seiner Zugehörigkeit zur Akademie, zwischen 1733 und 1735, erschienen etliche geometrische und astronomische Untersuchungen von CLAIRAUT, so 1733 die "Nouvelle manière de trouver les formules des centres de gravité", "Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position", 1734 erschienen die bereits erwähnten "Quatre problèmes

sur des nouvelles courbes" und 1735 "Des épicycloïdes sphériques", "Manière de trouver des courbes algébriques et rectifiables sur la surface d'un cône", "Solution d'un problème de géométrie", "Sur quelques questions de *maximis & minimis*", "Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini; avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la Terre", "Solution de plusieurs problèmes, où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée" und schließlich "Remarques sur la méthode de M. Fontaine pour résoudre le problème où il s'agit de trouver une courbe qui touche les cotés d'un angle constant dont le sommet glisse dans une courbe donnée"[1].

Für die weiteren Veröffentlichungen sei auf das unten genannte "Inventaire chronologique de l'oeuvre d'Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)" von René TATON sowie auf Kapitel 1 dieser Arbeit (bezüglich der "Eléments de géométrie" und der "Eléments d'algèbre") verwiesen.

Durch seine frühe Aufnahme in die "Académie des Sciences" lernte CLAIRAUT die bedeutendsten französischen Mathematiker jener Zeit kennen, unter anderem auch den fünfzehn Jahre älteren P.-L. MOREAU DE MAUPERTUIS (1698 - 1759): *Durch einen interessanten Begleitumstand war die Ernennung Clairauts als "Adjoint mécanicien" an der Akademie nur zehn Tage der von Maupertuis zum "Pensionnaire" vorangegangen. Dieser Umstand, durch den sie zu Kollegen wurden, brachte die beiden Mathematiker einander näher, und wir wollen nicht versäumen, die sich entwickelnde enge und dauerhafte Zusammenarbeit zu bemerken. Ihre Zusammenarbeit wurde durch die Tatsache erleichtert, daß die mathematische*

---

[1] Diese Auflistung ist entnommen aus (TATON 1976). Sie ist bis einschließlich 1735 vollständig. Die nächste Veröffentlichung CLAIRAUTs datiert erst wieder aus dem Jahr 1738, nach seiner Lappland-Fahrt.

Schulung Clairauts große Analogien zu der von Maupertuis aufwies. Während dieser noch von den letzten Jahren des berühmten Guisnée profitierte, hielt Clairaut bereits mit neun Jahren dessen "Application de l'algèbre à la géométrie" in den Händen und versäumte es nicht, seine Studien in den folgenden Jahren durch die Lektüre der "Sections coniques" und der "Analyse des infiniment petits" des Marquis de l'Hopital zu vervollständigen (BRUNET 1929 a, S. 18). Und ferner: *Da also die Bildung der beiden Wissenschaftler ausgezeichnet übereinstimmte, mußten ihre Untersuchungen sie fast von selbst in die gleiche Richtung und zu einer effektiven Zusammenarbeit führen. Obwohl Maupertuis weiterhin mit Nicole zusammenarbeitete, wandte er sich immer mehr Clairaut zu* (BRUNET 1929 a, S. 19).

Die Bedeutung von MAUPERTUIS liegt darin, daß er der erste war, der offen für die Anerkennung der NEWTONschen Ideen in Frankreich eingetreten ist. Im "Discours préliminaire" der berühmten "Encyclopédie" von DIDEROT und D'ALEMBERT, die zu Beginn der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts entstanden ist, heißt es etwa: *Der erste, der es von uns gewagt hat, sich offen für Newton auszusprechen, ist der Verfasser der Abhandlung "Sur la figure des astres", der sehr ausgedehnte geometrische Kenntnisse mit einem philosophischen Geist verbindet, die sich nicht immer zusammenfinden, und mit einem Talent, so zu schreiben, daß man nicht mehr glaubt, sie würden schaden, wenn man seine Werke gelesen hat. Herr de Maupertuis glaubte, man könne ein guter Bürger sein, ohne die Physik seines Landes blind zu übernehmen; und um diese Physik anzugreifen, brauchte er Mut, für den wir ihm dankbar sind.*

Denn während *England sehr schnell von den Newtonschen Ideen eingenommen wurde* (BRUNET 1929 a, S. 14), waren NEWTONs Ideen *in Frankreich nicht nur ... unbekannt, sondern dort dominierte noch die scholastische Philosophie, während Newton die Cartesianische Physik bereits umgekehrt hatte ...*, wie an gleicher Stelle der oben erwähnten "Encyclopédie" zu lesen ist.

Über MAUPERTUIS und die wissenschaftliche Einstellung der "Académie des Sciences" in jenen Jahren bemerkt BRUNET (1929 a, S. 20): *Zur gleichen Zeit* (also 1732) *erschien tatsächlich sein erstes Werk, die Abhandlung über die verschiedenen Gestalten der Sterne, das einen entscheidenden Schritt bei der Verwirklichung eines Programms darstellte, das unter dem Einfluß Newtons abgefaßt wurde ... Wenigstens in Frankreich wurde in dieser Epoche noch die Cartesianische Physik fast gänzlich akzeptiert ... Was insbesondere die "Académie des Sciences" betrifft, so hatte diese Newton sehr früh ihre Türen geöffnet, jedoch ohne seine Theorien zu akzeptieren, so daß die meisten Mitglieder dieser Gesellschaft zwischen 1730 und 1735 noch Cartesianer waren.*

Im Jahr 1728 hatte MAUPERTUIS eine sechsmonatige Reise nach London unternommen. BRUNET wertet die Bedeutung der Reise so (1929 a, S. 15): *Zu der Zeit, als Maupertuis in London eintraf, war Newton gerade gestorben. Wir können die Bedeutung dieser Reise, die wirklich entscheidend für die spätere Orientierung der Arbeiten Maupertuis' erscheint, kaum überschätzen. Dadurch verstehen wir, wie er anschließend einer der ersten Protagonisten der Newtonschen Bewegung in Frankreich werden konnte, und die Ideen Newtons über das Bild der Erde überzeugt verfocht.*

Daß Frankreich und die "Académie des Sciences" mit ihrem Beharren auf DESCARTES' Physik und auf dem cartesianischen Systemdenken weit hinter der allgemeinen wissenschaftlichen Entwicklung zurücklag zu jener Zeit, belegen zwei Äußerungen von MAUPERTUIS selbst (BRUNET 1931, S. 203): *Es bedeutete keinen großen Ruhm, seinen Landsleuten eine Entdeckung vorzustellen, die von anderen bereits fünfzig Jahre früher gemacht wurde. So kann ich sagen, daß ich der erste bin, der es wagte, in Frankreich die Erdanziehung wenigstens als ein untersuchungswürdiges Prinzip vorzuschlagen.*
Und gegen das cartesianische Systemdenken (BRUNET 1929 b, S. 358): *Systeme stellen für den Fortschritt der Wissenschaft wahrhafte Unglücke dar: Ein systematischer Autor*

sieht nicht mehr die Natur, sondern nur sein eigenes Werk. Alles, was nicht gerade vollkommen gegen sein System ist, bestätigt es: Die Phänomene, die ihm am meisten widersprechen, bestehen nur aus einigen Ausnahmen.

STEINMANN faßt die Entwicklung der "Académie des Sciences" in jener Zeit so zusammen (STEINMANN 1913, S. 69): An der "Académie des Sciences" herrschte *noch bis tief ins 18. Jahrhundert hinein der Cartesianismus, anfangs unbeschränkt, dann von der jüngeren Generation mehr und mehr bekämpft. In den zwanziger Jahren wurde der Streit sehr lebhaft; eine entscheidende Wendung nahm er aber erst, als Maupertuis, von einer Studienreise nach England und nach Basel zu den Bernoulli's zurückgekehrt, sich in Paris mit dem ganzen Feuer seiner Begeisterung und der ganzen Gewandtheit seiner Feder für die neue Lehre einsetzte. Mit dem Prinzipienstreit verband sich zugleich der um ein bestimmtes Forschungsergebnis: um die Frage nach der Abplattung oder Zuspitzung der Erde an den Polen. Erst als Maupertuis und La Condamine diese Frage durch ihre berühmten Expeditionen nach Lappland und nach Peru im Sinne Newtons entschieden und die Hauptgegner, die Brüder Cassini, ihren Irrtum zugegeben hatten, ließ der Widerstand der älteren Akademiemitglieder nach.*

Aufgrund der anfangs beschriebenen besonderen Beziehung zwischen MAUPERTUIS und CLAIRAUT ist es nicht verwunderlich, daß CLAIRAUT auch sehr bald ein engagierter Vertreter der NEWTONschen Ideen in Frankreich wurde.

Im April des Jahres 1734 plante MAUPERTUIS eine Reise zur Mathematikerfamilie BERNOULLI nach Basel, und er bot CLAIRAUT an, ihn zu begleiten. Sie reisten im September ab und kehrten im November oder Anfang Dezember zurück. *Sofort nach ihrer Rückkehr nach Paris hatten sich Clairaut und Maupertuis auf den Mont Valérien zurückgezogen, um mit mehr Ruhe nach ihrem Belieben über die Probleme nachzudenken, deren Erforschung sie zusammen verfolgten* (BRUNET 1952, S. 13), sozusagen in eine wissenschaftliche Einsiedelei, die dort bereits seit den Anfängen des 17. Jahrhun-

derts bestand.

Auf dem Mont Valérien wurde MAUPERTUIS oft von der Marquise DU CHÂTELET (1707 - 1749) besucht, die dabei auch CLAIRAUTs Bekanntschaft machte.
Die Marquise DU CHÂTELET war ein weiteres Mitglied der sich um MAUPERTUIS und CLAIRAUT formierenden Gruppe, die intensiv an der Popularisierung der NEWTONschen Ideen in Frankreich arbeiteten. Ihre Bedeutung für diesen Kreis lag unter anderem darin, daß sie - als Freundin von VOLTAIRE - die Brücke schlug zwischen den fortschrittlichen Wissenschaftlern in Frankreich in jener Zeit und den Philosophen der Aufklärung. Über ihre Bedeutung schreibt BRUNET (1952, S. 15): *Man hat sie in der Tat zu oft als Freundin Voltaires vorgestellt, und man ließ zu sehr vermuten, dies wäre ihr einziges Renommee, das sie der Nachwelt hinterließ. In Wirklichkeit stellte die Verbindung mit ihm im Leben dieser außergewöhnlich intelligenten und unbestritten wissenschaftlich kompetenten Frau nur eine etwas lächerliche Episode dar, die, nachdem sie die "Chronique scandaleuse" ihrer Epoche belustigt hatte, unglücklicherweise bis in unsere gelangt ist, um unsere Ansicht und unser Urteil zu trüben.*
Ihre Bedeutung für die Verbreitung der NEWTONschen Ideen in Frankreich betont HAMEL (HAMEL 1912, S. 69-70): *There have been comparatively few great women mathematicians in the world. Hypatia in the fourth century was the first; Mme du Châtelet in the eighteenth the second; ... Mme du Châtelet's reputation was sound. She was an earnest and indefatigable worker; she helped to spread certain new ideas which were being taken up by the French scientists and philosophers of the day; but she did nothing great in the way of original thinking, nor could it be said that her contributions to science emanated solely from herself, because in all her work she had the support of one or another among the greatest savants on the Continent. Voltaire, needless to say, had unbounded faith in her intellectual gifts, and was for ever singing her praises ... A dozen years later, after her death, he wrote, in 1752,*

his still more flowery "Eloge historique" upon Mme du Châtelet's translation of Newton ... "Two wonders have been performed," he cried: "one that Newton was able to write this work, the other that a woman could translate and explain it ...

Über die Besuche von Madame DU CHÂTELET auf dem Mont Valérien schreibt BERTRAND (1865, S. 59): CLAIRAUT *erhielt oft Besuch aus Paris, und besonders Mme du Châtelet, die berühmte Freundin Voltaires, kam jeden Morgen zu Pferd, um eine Geometrielektion zu nehmen, ohne sich um die Anstrengungen der Reise noch um das, was die Welt darüber denken könnte, Gedanken zu machen. Nach der Geometrieabhandlung zu urteilen, die Clairaut uns hinterließ, mag es scheinen, daß diese Unterrichtsstunden ziemlich oberflächlich gewesen sein müssen. Sie versetzten Mme du Châtelet dennoch in die Lage, die Prinzipien von Newton zu übersetzen und sogar Anmerkungen hinzuzufügen, wobei jedoch die Vermutung naheliegt, daß ihr Lehrer dabei seine Hand im Spiel hatte. Aber in diesem Punkt wie in dem der mehr oder weniger großen Innigkeit ihrer Beziehung sind wir nur auf Vermutungen angewiesen ...*

Auch die "Eloge de M. Clairaut" in der "Histoire de l'Académie Royale des Sciences" aus dem Jahr 1765 (CLAIRAUTs Todesjahr) stellt eine Verbindung zwischen CLAIRAUTs Unterricht für Madame DU CHÂTELET und den "Eléments de géométrie" her (HARS 1765): *Die Entfernung von Paris schützte sie jedoch nicht vor jeglichen Besuchen; die berühmte Mme Marquise du Châtelet war fest entschlossen, die Geometrie von Herrn Clairaut zu lernen, und so besuchte sie ihn oft zu Pferd auf dem Mont Valérien; und für sie stellte er die "Elémens de Géométrie" zusammen, die er im Jahr 1741 veröffentlichte; dieses Werk ist einzigartig; er steigt dort von der Anwendung der Geometrie zu Problemen, zu Theoremen und schließlich zu Axiomen auf. Er folgt mit einem Wort dem Weg, den die Menschen bei der Erfindung dieser Wissenschaft gegangen sind, und lehrt sie seine Leser weniger als daß er sie sie entdecken läßt; dadurch beugt er der Trocken-*

heit und dem Verdruß vor und schärft ihnen die Lektionen viel besser ein, so daß sie sich dort sozusagen mit den Farben des Selbstwertgefühls gemalt wiederfinden.

Der Unterricht für Madame DU CHÂTELET sollte sie darauf vorbereiten, die "Principia mathematica philosophiae naturalis" von Isaac NEWTON ins Französische zu übersetzen. *Von der ersten Auflage der "Philosophiae naturalis principia mathematica" von 1687 wurden nur 250 Exemplare herausgebracht, von der zweiten im Jahr 1713 750 Exemplare; anschließend erschienen die Auflage von 1726, die englische Übersetzung von Motte 1729, die französische Übersetzung der Marquise du Châtelet 1756, danach noch etliche andere*[1] (TATON 1958, S. 478).

VOLTAIRE beschrieb Madame DU CHÂTELET in seinen "Memoires" so (VOLTAIRE 1883, S. 8): *Für die Wahrheit geboren, gab sie bald die Systeme auf und widmete sich den Entdeckungen des großen Newton. Sie übersetzte das ganze Buch "Principes mathématiques" ins Französische; und nachdem sie ihre Kenntnisse verfestigt hatte, fügte sie diesem Buch, das so wenig Leute verstehen, einen algebraischen Kommentar hinzu, der dem gewöhnlichen Leser kaum noch zugänglich ist. Herr Clairaut, einer unserer besten Geometer, hat diesen Kommentar genau überprüft. Eine Ausgabe davon wurde begonnen; es ist nicht gerade rühmlich für unser Jahrhundert, daß sie nicht beendet wurde.*

Und im "Préface historique" der Übersetzung der "Principia", das von VOLTAIRE verfaßt wurde, hieß es (NEWTON 1759, S. ix-x): *Angesichts des algebraischen Kommentars ist es ein Werk, das über die Übersetzung hinausgeht. Mme du Châtelet arbeitete dabei an den Ideen von Herrn Clairaut: Sie führte alle Rechnungen selbst durch, und wenn sie ein Kapitel beendet hatte, sah Herr Clairaut es nach und korrigierte es.*

---

[1] Von diesem - anfangs nur in sehr geringer Auflage gedruckten - Werk NEWTONs besaß CLAIRAUT eine Ausgabe von 1687, eine Amsterdamer Ausgabe von 1723, diejenige von 1726, eine Genfer Ausgabe von 1739 "cum comm.", eine Ausgabe in englischer Sprache aus dem Jahr 1754 sowie eine Übersetzung ins Französische aus dem Jahr 1759 (CATALOGUE 1765).

Doch das ist nicht alles, denn bei einer so mühsamen Arbeit kann ein Versehen entstehen; es kann leicht passieren, daß man beim Schreiben ein Zeichen an die Stelle eines anderen setzt; Herr Clairaut ließ die Rechnungen noch einmal von einem Dritten nachsehen, so daß es bei der Reinschrift so gut wie unmöglich war, daß in dieses Werk ein Flüchtigkeitsfehler geraten war; und es ist mindestens ebenso unmöglich, daß ein Werk, an das Herr Clairaut Hand angelegt hat, nicht exzellent in seiner Art wäre.

Diese Berichte sind wohl nicht sehr objektiv. Über den "Algebraischen Kommentar" lesen wir im "Vorwort des Herausgebers" der 1759 erschienenen Übersetzung[1] (NEWTON 1759, S. ij-iij): *Alle diese Forschungsergebnisse sind vorwiegend entweder den Werken von Herrn Clairaut entnommen oder den Heften, die er M. le comte du Châtelet, dem Sohn der berühmten Marquise, in Form von Unterrichtsstunden gab.* Und zur Übersetzung der "Principia" heißt es im "Vorwort des Herausgebers": *Angesichts des Vertrauens, das die Öffentlichkeit in diese Übersetzung setzen muß, reicht es zu sagen, daß sie von der verstorbenen Mme la Marquise du Châtelet angefertigt und von Herrn Clairaut nachgesehen wurde.*

Über den Grad der Mitwirkung CLAIRAUTs an der Übersetzung der "Principia" von NEWTON gibt es nur Vermutungen. Das vergleichsweise geringe Niveau der "Eléments de géométrie" von CLAIRAUT, die im Jahr 1741 erschienen sind, sowie der Briefwechsel zwischen MAUPERTUIS und Madame DU CHÂTELET lassen starke Zweifel aufkommen, daß sie der Urheber des "Algebraischen Kommentars" der "Principia" sowie der alleinige Übersetzer war. So schreibt BACHELARD (1938, S. 34): *Man braucht nur die Briefe der Mme du Châtelet zu lesen, um tausend Anlässe zu finden, ihren Anspruch in bezug auf die mathematische Kultur zu belächeln. Sie*

---

[1] Wie bereits gesagt, war die erste Auflage der französischen Übersetzung im Jahr 1756 erschienen. Von dieser Auflage ist jedoch kein Exemplar mehr auffindbar.

stellt Maupertuis Fragen, ... die heutzutage ein junger Schüler der 4. Klasse ohne Schwierigkeiten zu beantworten vermag.

D'OCAGNE schreibt (1932, S. 48): *Es ist bekannt, daß die Übersetzerin das Werk um einige originelle mathematische Anmerkungen bereicherte. Aber scharfe Zungen gaben zu verstehen, daß man in diesen Anmerkungen die Hand Clairauts wiedererkennen könnte. Wird man es je wissen? Auf jeden Fall diente die berühmte Marquise als Bindeglied zwischen Clairaut und Voltaire, der sich, wie man weiß, manchmal etwas darauf einbildete, als Wissenschaftler mitzumischen.*

BRUNET ist hingegen der Meinung, daß es unwahrscheinlich ist, daß die "Elêments de géométrie" *für den Gebrauch der Anfänger nur eine Zusammenfassung der Lektionen ist, die er der Marquise erteilt hat. Denn zu der Zeit, als sie ihm die Leitung ihrer mathematischen Studien anvertraute, hatte sie bereits viel mit Maupertuis gelernt; zu viel, so scheint es, als daß sie für die vorgelegten Bemerkungen in diesem exzellenten Abriß irgendein anderes Interesse gehabt haben könnte als bezüglich der Neuheit in der Methode der Darstellung* (BRUNET 1952, S. 63).

War es schon unmöglich, an dieser Stelle ein umfassendes Bild von MAUPERTUIS und der Marquise DU CHÂTELET zu geben[1], so gilt dies vollends für VOLTAIRE. Hier kann daher nur kurz auf die Verbindung zwischen VOLTAIRE als führendem Philosophen der Aufklärung und CLAIRAUT eingegangen werden. Diese Verbindung betont HAMEL (1912, S. 71): *Learned as she was,"la docte Emilie"must always be regarded as far more interesting as a woman than as a mathematician. But the importance of her intellectual side is very great, because it led her into the society of many a clever man besides Voltaire. The little group of mathematicians who were her friends included Maupertuis, Clairaut, Koenig,*

---

[1] Hierzu sei auf die umfassenden Werke (HAMEL 1912), (BRUNET 1929 a) und (BRUNET 1929 b) verwiesen.

and Bernoulli, men who were the immediate forerunners of the great thinkers of the last half of the century - d'Alembert, Diderot, Montesquieu, Lagrange, Turgot, Condorcet and many others.

VOLTAIRE entwickelte sich sehr bald, bereits zu Anfang der dreissiger Jahre des 18. Jahrhunderts, zu einem glühenden Bewunderer der NEWTONschen Ideen[1]. Bei TATON heißt es (Taton 1958, S. 466): *In der Person Voltaires hatte Maupertuis einen ausgezeichneten Schüler, der sich in seinen "Lettres philosophiques" von 1734 für Newton ausspricht und 1738 die "Eléments de la philosophie de Newton" schreibt, ein allgemeinverständliches Werk, in dem er seinen Lesern versichert, daß "Newton für sie gerechnet hat". Wir verdanken Voltaire noch das Vorwort zu der französischen Übersetzung der "Principia", die von der Marquise du Châtelet in Zusammenarbeit mit Clairaut angefertigt wurde. Er verurteilt darin die ganze Generation, die in den Irrtümern des Descartes alt geworden ist, und die Newtons Aufklärung abgelehnt hat.*

Was VOLTAIRE und seine Gesinnungsgenossen an NEWTON so anzog, war wohl wesentlich die Verbindung einer von kirchlichen Vorurteilen freien Naturwissenschaft mit einem lebhaften, oft betonten Glauben an die Allmacht und Güte Gottes; nur so ist es zu verstehen, daß die Landsleute DESCARTES', beinahe noch Zeitgenossen MALEBRANCHEs, die Metaphysik des englischen Naturforschers ebenso begeistert aufnahmen wie seine Physik.

---

[1] Es blieb nicht allein bei VOLTAIREs Bewunderung. Als er eine Abhandlung über die Kraft eines sich bewegenden Körpers der Akademie einreichte, fiel CLAIRAUT die Aufgabe zu, einen Bericht über diese Abhandlung zu geben. Da die Arbeit von keinerlei wissenschaftlichem Wert war, CLAIRAUT dies aber nicht so offen sagen wollte, beschränkte er sich darauf, über die Abhandlung nur zu berichten, ohne ein Urteil darüber abzugeben. Der Schlußsatz seines Berichts lautete: *In allen schwer zu vertiefenden Fragen, die die beiden Teile der wissenschaftlichen Abhandlung einschließen, scheint es, daß Herr de Voltaire über den aktuellen Stand der physikalischen Forschung genau unterrichtet ist, und daß er selbst viel über diese Wissenschaft nachgedacht hat* (BERTRAND 1902).

Obgleich MAUPERTUIS in Frankreich *der wirkliche Protagonist und Initiator der Bewegung zugunsten des Newtonianismus war* (BRUNET 1929 a, S. 28), war *philosophisch ungleich bedeutsamer ... sein Verbündeter im Kampf für die Verbreitung des Newtonianismus in Frankreich, Voltaire. Um dieselbe Zeit wie Maupertuis war auch er in England; das Werk aber, das mehr als irgend etwas anderes zur Popularisierung Newtons in Frankreich beitrug, die "Elémens de la Philosophie de Newton", erschien erst 1738, zunächst in Amsterdam, dann 1741 in Paris* (STEINMANN 1913, S. 70).

VOLTAIRE berichtet in seinen "Lettres anglaises" selbst über seine Reise nach London (VOLTAIRE 1879, S. 127-128): *Ein Franzose, der nach London kommt, findet die Dinge in der Philosophie wie in allem anderen sehr verändert vor. Er hat die Welt voll zurückgelassen, er findet sie leer vor. In Paris sieht man das Universum zusammengesetzt aus Strudeln subtiler Materie* ("tourbillons de matière subtile"), *in London sieht man nichts davon. Bei uns ruft der Druck des Mondes die Flut hervor; bei den Engländern strebt das Meer dem Mond entgegen ... Bei Euch Cartesianern vollzieht sich alles durch einen Impuls, den man kaum versteht, bei Herrn Newton durch eine Anziehungskraft, deren Ursprung man nicht besser kannt. In Paris stellt Ihr Euch die Erde wie eine Melone vor; in London ist sie an beiden Seiten abgeflacht. Für einen Cartesianer existiert das Licht in der Luft; für einen Newtonianer kommt es in sechseinhalb Minuten von der Sonne ... das sind die ernstlichen Gegensätze.*

Die Bedeutung der "Elémens de la Philosophie de Newton" von VOLTAIRE sieht LACROIX 1805 weniger auf wissenschaftlicher denn auf gesellschaftlicher Ebene (LACROIX 1805, S. 13): *Wer könnte leugnen, daß seine "Elémens de la Philosophie de Newton", so unvollkommen sie in wissenschaftlicher Hinsicht sein mögen, daß sein Schreiben an M^me^ Duchatelet, in dem das System der Welt in Versen, den schönsten Stücken des Lukrez vergleichbar, beschrieben wird, und daß eine Reihe überraschender Gedanken, die*

sich durch die meisten seiner Gedichte ziehen, dem Volk nicht ebenso die Erträge der schlaflosen Nächte der Geometer verständlich gemacht haben, wie die wissenschaftlichen Operationen, die auf den Reisen zur Bestimmung der Erdform, die Newton nur durch die Theorie bestimmt hatte, durchgeführt wurden; aber wenn die Mathematikwissenschaft Voltaire auch viel verdankt, so ist es doch erlaubt zu sagen, daß er für seinen Ruhm von dem Wissen profitierte, das er aus ihren Reichtümern, die sie unter seinen Augen erwarb, zog, und von der Aufmerksamkeit, die er dem Umgang mit den berühmtesten Geometern schenkte.

Wie bereits weiter oben erwähnt, war zu Beginn der dreissiger Jahre des 18. Jahrhunderts ein wissenschaftlicher Hauptstreitpunkt die Form der Erde: NEWTON hatte eine Abflachung der Erde an den Polen berechnet, die Gebrüder CASSINI glaubten aufgrund ihrer Messungen eine Zuspitzung der Erde an den Polen belegen zu können.
Den NEWTONschen Berechnungen lag folgendes Phänomen zugrunde: Im Jahr 1672 wollte RICHTER, ein Mitglied der "Académie des Sciences", in Cayenne astronomische Untersuchungen durchführen. Seine Pendeluhr, die in Paris auf eine mittlere Sonnenbewegung eingestellt worden war, zeigte in Cayenne, nahe dem Äquator, jeden Tag eine Verspätung von zwei Minuten und 28 Sekunden. Für NEWTON, der eine Abnahme der Erdanziehungskraft mit dem Quadrat der Entfernung postulierte, folgte daraus die Abflachung der Erde an den Polen (bzw. die Ausbauchung der Erde am Äquator).
Die Grundidee der CASSINIschen Messungen beruhte darauf, die Längen mehrerer Grade auf einem Großkreis, der durch den Nordpol geht, miteinander zu vergleichen. Entsprechende Messungen in Frankreich über insgesamt mehr als 8,5 Grad in Nord-Süd-Richtung unter Leitung von Jean-Dominique CASSINI waren bereits im Jahr 1683 begonnen worden, wurden dann aber unterbrochen. Eine erneute Messung im Jahr 1700, ebenfalls unter der Leitung von CASSINI, ergab zwischen Paris und Collioure eine mittlere Länge eines Grades von

57100 "toises" (Klafter[1]). Dieses Ergebnis wurde von CASSINI 1713 in neuen Untersuchungen verifiziert. Verglichen mit der Länge eines Grades, die zwischen Paris und Amiens festgestellt wurde, ergab sich eine Zuspitzung der Erde an den Polen.

Um dieses Problem entbrannte ein heftiger wissenschaftlicher Streit. MAUPERTUIS ergriff 1732 mit seinem "Discours sur les différentes figures des astres" für NEWTON Partei, CLAIRAUT 1735 mit seinem bereits erwähnten "Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini; avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la Terre"[2] ebenfalls, hingegen bestätigte Jean BERNOULLI die CASSINIsche Vermutung 1734 in seinem "Essai d'une nouvelle Physique céleste servant à expliquer les principaux phénomènes du ciel", in dem er sich auf die "cartesianischen Wirbel" (à la théorie cartésienne des tourbillons) berief.

Der Streit führte schließlich zu zwei wissenschaftlichen Reisen, beide mit dem Ziel, die Länge eines Grades an sehr unterschiedlichen Orten zu messen. Im Mai 1735 fuhren GODIN, BOUGUER und LA CONDAMINE nach Peru, um diese Messungen in Äquatornähe durchzuführen, und nach umfangreichen, insbesondere methodischen, Vorbereitungen fuhren am 2.5.1736 CAMUS, CELSIUS, CLAIRAUT, LE MONNIER, MAUPERTUIS und OUTHIER von Dünkirchen aus nach Lappland.

Die Reise dauerte länger als zwei Jahre, am 20.8.1737 war die Expedition wieder in Paris[3]. Während der Reise angestellte Messungen ergaben eine Verifizierung der NEWTONschen

---

[1] 6 Klafter entsprachen 1,95 m.

[2] Diese Auflistung ist selbstverständlich nicht vollständig. CLAIRAUT veröffentlichte beispielsweise 1738 einen Aufsatz "Sur la nouvelle méthode de M. Cassini, pour connaître la figure de la Terre", der der Akademie bereits im Juni 1735 vorgelegen hatte (TATON 1976).

[3] Der genaue Verlauf der Reise ist beispielsweise in (BRUNET 1952) beschrieben.

Behauptung der Abflachung der Erde an den Polen. Damit war der Streit um die Gestalt der Erde aber noch nicht entschieden. Im Jahr 1738 erschien eine anonyme Abhandlung "Examen désintéressé des différents ouvrages qui ont été faits pour déterminer la figure de la terre", die MAUPERTUIS zugeschrieben wurde, kurz danach veröffentlichte dieser sein "Lettre d'un horloger anglais à un astronome de Pékin traduite par M...", in dem er die Behauptungen und Untersuchungen der Familie CASSINI bezüglich der Erdgestalt angriff und lächerlich machte.

Im Jahr 1739 wiederholten MAUPERTUIS und CLAIRAUT die Messung eines Grades zwischen Paris und Amiens. Alle diese Untersuchungen, auch die der Expedition nach Peru, ergaben eine Abflachung der Erde an den Polen von etwa 1/178.

CLAIRAUT nahm an dem Streit weniger durch Veröffentlichungen teil[1], unterstützte seinen Kollegen und Freund MAUPERTUIS aber sowohl bei Diskussionen in der Akademie als auch bei wissenschaftlichen Gesprächen in den Salons.

In den Jahren von 1737 bis 1740 verließ CLAIRAUT Paris kaum, während dieser Zeit begann er, neben anderen Arbeiten mathematischer und physikalischer Richtung, die "Eléments de géométrie" zu verfassen.

Im Dezember 1737 präsentierte CLAIRAUT der Akademie einen Aufsatz "De l'aberration apparente des étoiles causée par le mouvement progressif de la lumière". Diese Arbeit ist an dieser Stelle nicht wegen ihres physikalischen Inhalts interessant, sondern weil CLAIRAUT hier außerhalb seiner beiden Lehrbücher Bemerkungen zur Methode der Forschung und zu den Nachteilen der herkömmlich dargestellten Algebra gemacht hat. CLAIRAUT schreibt in dieser Abhandlung (zitiert aus (BRUNET 1952, S. 54-57)): *Ich habe zwei Lösungen gefunden, eine durch die Analyse, eine durch die Synthese.* Als Begründung dafür, beide Lösungswege auch angegeben zu

---

[1] Seine in den Jahren 1738 und 1739 erschienenen Veröffentlichungen hatten teilweise schon 1735 der Akademie vorgelegen.

haben, nennt er folgende Überlegungen: *Das hauptsächliche Ziel, das man sich bei der Lösung eines Problems setzen muß, wenn man sie vielleicht oft gebrauchen wird, ist, zu einer Formel zu gelangen, bei der man bei jeder speziellen Anwendung nur eine kleine Anzahl von Operationen auszuführen hat. Es ist von geringer Bedeutung, daß die allgemeine Lösung Schwierigkeiten einschließt, vorausgesetzt, daß sie zu einem Resultat führt, das leicht zu erhalten ist. Ich hoffe, diesen Vorteil bei meiner vorhergehenden Bestimmung [dieser Text ist in der Tat zwischen der ersten Art zu rechnen und der zweiten eingeschoben] der Abweichung des Lichtes der Planeten klargemacht zu haben, indem ich mich der Hilfen der Algebra bedient habe, um in einer Formel die Größen zu ordnen, die, ein für alle Male bereits berechnet, die Anzahl jener Größen verringern, die bei jeder Anwendung berechnet werden müssen. Aber es gibt ein anderes Ziel bei dieser Art von Problemen, das fast ebenso wichtig ist, und das die Algebra selten erreicht, nämlich einfache Mittel anzugeben, um in jedem einzelnen Fall den Sinn zu unterscheiden, demzufolge man die Größen nehmen muß, von denen man Gebrauch macht, um nichts hinzuzufügen, was weggelassen werden muß, oder wegzulassen, was hinzugefügt werden muß. Wenn es zum Gebrauch einer Formel nötig ist, den Sinn der allgemeinen Lösung sich wieder klarzumachen, oder wenn die Regeln, die man gefunden hat, um sich darüber hinwegzusetzen, schwierig zu verstehen sind, so geschieht es oft, daß man sich in der Rechnung irrt und sogar, daß man sie aufgibt ...*
Bei der folgenden Lösung ist es mir gelungen, diese Unannehmlichkeit zu umgehen, indem ich die Aberration auf Prinzipien zurückgeführt habe, zu denen man einfach gelangt, und die das Problem an eine sehr vertraute astronomische Operation erinnern. Schließlich, wenn meine neue Lösung, um der ersteren vorgezogen zu werden, eine leichtere und kürzere Anwendung in gewissen Fällen hat, so hat die erstere den Vorteil auf ihrer Seite, daß man bei einmaligem Hinsehen alle Begleitumstände der Aberration sieht,

das Verhältnis, das sie miteinander haben müssen, um den größten oder geringsten Effekt zu erzielen, um den Effekt von der und der Größe zu erzielen, schließlich, um die verschiedenen Veränderungen zu finden, für die das Phänomen geeignet ist; ein Vorteil, der an der Natur der analytischen Lösungen liegt.

Diese Gedanken zeigen, wie sehr CLAIRAUT daran gelegen war, in seinen Darstellungen nur die absolut unvermeidbaren Schwierigkeiten zu belassen und seine Gedankengänge so weit wie möglich plausibel zu machen.
Auch unter einem anderen Aspekt ist der Aufsatz über die Ablenkung des Lichtes von Bedeutung: Hier wurde zum ersten Mal die NEWTONsche Theorie der Optik in ihrer Gesamtheit der "Académie des Sciences" präsentiert.

Wann CLAIRAUT seine "Eléments de géométrie" der Akademie vorgelegt hat, ist den handschriftlichen Protokollen der Akademiesitzungen nicht zu entnehmen, am 31.8.1740 gaben REAUMUR, DE MAIRAN und NICOLE ihren Bericht über das Werk (vgl. Kapitel 2, S. 124).

Die "Eléments d'algèbre" wurden der Akademie am 4.8.1745 vorgelegt, der Bericht von NICOLE und BOUGUER folgte am 20.7.1746 (vgl. ebenfalls Kapitel 2, S. 127).

In seinen weiteren Abhandlungen mathematischer und physikalischer Art erwies sich CLAIRAUT als überzeugter Anhänger der NEWTONschen Theorien. So schrieb er z.B. in seiner "Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique", veröffentlicht im Jahr 1743 (BRUNET 1952, S. 78): *Seit dem Erscheinen Newtons mußten die aufgeklärten Cartesianer erkennen, daß die Schwerkraft im ganzen Universum verbreitet war; sie sind schließlich übereingekommen, daß der Mond ein schwerer Körper ist, der zur Erde hinstrebt; daß die Erde und alle Planeten eine analoge Anziehung zur Sonne hin besitzen, ebenso wie die Monde gegenüber ihren Hauptplaneten; und dadurch, daß sie sich auch verpflichtet fühlten zuzugeben, daß sich alle diese Kräfte im gleichen Verhältnis vergrößern, wie*

das Quadrat des Abstandes zum Zentralkörper abnimmt, haben sie versucht, aus ihren Prinzipien die Erklärung für diese Phänomene zu ziehen.

Dieses Überzeugtsein von den NEWTONschen I d e e n bedingte aber keineswegs gleichzeitig ein Überzeugtsein von der D a r s t e l l u n g s f o r m in NEWTONs Werken. Auch in CLAIRAUTs "Du système du Monde dans les principes de la gravitation universelle" (CLAIRAUT 1749 c) finden wir wieder seine Liebe zur Klarheit und Einfachheit der Darstellung: *Das berühmte Buch über die "Principes mathématiques de la Philosophie naturelle" stellte die Epoche einer großen Revolution in der Physik dar. Die Methode, der ihr berühmter Autor, Herr Newton, gefolgt ist, um von den Fakten auf die Ursachen zurückzugehen, hat das Licht der Mathematik auf eine Wissenschaft ausgebreitet, die sich bisher im Dunkel der Vermutungen und Hypothesen befand. Wenn es auch richtig ist, alles anzuerkennen, was wir dem großen Mann verdanken, so kommt man nicht umhin zuzugeben, daß die Art und Weise, in der er seine Entdeckungen dargelegt hat, den Nutzen, den man daraus ziehen konnte, beträchtlich behinderte; ich spreche hier nicht von der Kunst, mit der er seine Differentialrechnung verdunkelte, der Schlüssel zu allen seinen wissenschaftlichen Forschungen, weil diese Methode, nachdem sie ihm abgerungen wurde, so vertraut geworden ist, daß man ganz vergaß, wie unrecht er daran getan hat, sie nicht verständlich zu machen. Aber ist man nicht berechtigt, ihm einen anderen Fehler vorzuwerfen, der sicherlich all diejenigen befremdet hat, die sein Buch mit dem wirklichen Willen, es zu verstehen, gelesen haben? Er besteht darin, daß er an den meisten schwierigen Stellen sehr wenig Worte zur Erklärung der Prinzipien abgibt, während er sich mit Vergnügen den Details und den Wahrheiten der Rechnungen hinzugeben scheint, bei denen die Leser keinerlei Bedenken hätten, sich auf ihn zu verlassen, wenn sie die Fähigkeit besitzen, die Beweise davon zu finden.*

Die Schwierigkeiten, auf die man stößt, wenn man Herrn New-

ton folgt, sei es am Anfang, sei es im gesamten Verlauf seines Werks, haben zwei gleich schädliche Effekte hervorgebracht; viele seiner Leser haben sich bereits bei der ersten Betrachtung abgewandt und sich damit gebrüstet, sein System zu zerstören, ohne den Rechnungen und Beobachtungen zu folgen, auf die es gegründet ist; sie glaubten, sie könnten die Schwierigkeiten umgehen, indem sie in der Metaphysik Mittel suchten, die Unmöglichkeit der Anziehungskraft zu beweisen ...

Die eben zitierte Abhandlung "Du système du Monde" legte den Grundstein für einen jahrelangen Streit zwischen CLAIRAUT und BUFFON, dem Verfasser der "Histoire naturelle", der aber auch "La méthode des fluxions et des suites infinies" von NEWTON ins Französische übersetzt hatte. In seinem "Du système du Monde" hatte CLAIRAUT die NEWTONsche Theorie in einigen Punkten verbessert. BRUNET schreibt (1952, S. 81): *Es ist wahr, daß Clairaut, ausgehend von einem im wesentlichen Newtonschen Standpunkt, angesichts unannehmbarer Rechenergebnisse bei der Anwendung der Formeln Newtons zur Berechnung der Bewegung des erdfernsten Punktes des Mondes, zu neuen Schlußfolgerungen und regelrechten Berichtigungen von Newtons Buch geführt wurde.*

CLAIRAUT hatte in seinem "Du système du Monde" geschrieben, *daß die Anziehungskraft in der Natur existiert, sie aber einem anderen Gesetz folgt als dem Newtonschen.* Diese und ähnliche Äußerungen wurden sofort von den Cartesianern aufgegriffen, um gegen die Theorien NEWTONs zu Felde zu ziehen. Das bewog BUFFON, die NEWTONschen Theorien in einer 1747 verfaßten Abhandlung zu verteidigen (BRUNET 1952, S. 83-84): *Trotz Herrn Clairauts Autorität bin ich davon überzeugt, daß Newtons Theorie mit den Beobachtungen übereinstimmt; ich werde hier nicht die Prüfung durchführen, die nötig wäre, um zu beweisen, daß er sich nicht geirrt hat, wie man es ihm vorwirft, sondern ich finde, es ist einfacher, wenn man das Gesetz der Anziehungskraft so annimmt, wie es ist, und zeigt, daß das Gesetz, welches Herr Clairaut an die Stelle des Newtonschen setzen will,*

nur eine widersprüchliche Vermutung ist.

CLAIRAUT antwortete 1748 darauf in seiner "Réponse aux réflexions de M. de Buffon, sur la loi de l'attraction, et sur le mouvement des apsides". Auf die Gegenantwort von BUFFON reagierte er am 11.6.1749 mit seiner "Réponse à la réplique de M. de Buffon" und schließlich am 21.6.1749 mit einer weiteren "Réponse au nouveau Mémoire de M. de Buffon". Die Auseinandersetzung zwischen CLAIRAUT und BUFFON wurde erst durch ein Eingreifen der Akademie beendet.

Im Jahr 1752 erschien CLAIRAUTs "Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionelle aux quarrés des distances ...", für die er 1751 den Preis der Sankt-Petersburger Akademie der Wissenschaften erhalten hatte.

NEWTON hatte die Vermutung aufgestellt, daß die Kometen nicht nur zeitweilige Erscheinungen seien, sondern Sterne sind, die in einer derartig langgezogenen elliptischen Bahn aufgrund der allgemeinen Anziehung sich um die Sonne bewegen, daß der sichtbare Teil der Bahn sich uns als Parabelstück darstellt. Diese Theorie war in der Mitte des 18. Jahrhunderts allerdings keineswegs allgemein anerkannt, und, obwohl viele Cartesianer mittlerweile die Existenz der "allgemeinen Anziehungskraft" anerkannt hatten, gab es immer noch etliche Wissenschaftler, die die Kometen für Fackeln hielten, deren Aufleuchten und Erlöschen man kaum genau bestimmen könne.

Auf die Arbeiten von NEWTON gestützt, berechnete der englische Astronom HALLEY 1705 die Bahnen von 24 Kometen, und seine Berechnungen schienen die Hypothese von der elliptischen Bahnform zu verifizieren. Der heutzutage als "Halleyscher" bekannte Komet war zuletzt im Jahr 1682 erschienen, und HALLEY hatte seine Umlaufperiode zu 75 oder 76 Jahren berechnet, so daß der Komet spätestens 1759 wiedererscheinen mußte. Der genaue Zeitpunkt des Erscheinens des Kometen war unter anderem deswegen nicht genau angebbar, weil man bereits damals wußte, daß die Bahn des

Kometen bei seinem Erscheinen im Jahr 1682 zweimal vom Planeten Jupiter und einmal vom Planeten Venus gestört worden war. CLAIRAUT setzte sich nun ab 1757 zur Aufgabe, diese Störungen für das kommende Erscheinen genau zu berechnen und das Erscheinen des Kometen auf diese Weise genau vorauszusagen. Bei dieser Arbeit half ihm bei den astronomischen Bestimmungen, z.B. bei der Berechnung der Abstände des Planeten Jupiter vom Kometen, der junge Astronom Jérôme LALANDE. CLAIRAUTs umfangreiche Berechnungen ergaben schließlich die Voraussage der Wiederkehr des Halleyschen Kometen für Mitte April 1759[1] mit einer Toleranz von einem Monat, die CLAIRAUT im November 1758 seinen Kollegen der Akademie vortrug. Der Komet wurde zum ersten Mal am 21. Januar des Jahres 1759 gesichtet und mit Unterbrechungen aufgrund seiner Konjunktion zur Sonne bis zum 3. Juni beobachtet. Der Zeitpunkt der größten Sonnennähe war der 13. März 1759.

Die im Jahr 1760 erschienene "Théorie du mouvement des comètes ..." sowie einige vorhergehende astronomische Abhandlungen gaben den Anlaß zu einem weiteren Streit, ähnlich dem mit BUFFON, dieses Mal mit Jean le Rond D'ALEMBERT. MARIE berichtet (1886, S. 153): *Der Erfolg der Vorhersage, die er gewagt hatte, setzte seinem Ruhm die Krone auf, was die Öffentlichkeit ohne Rücksicht auf Halleys Rechte und zum Nachteil d'Alemberts und Eulers maßlos aufbauschte. Diese verrückte Schwärmerei wurde für Clairaut bald darauf zur Quelle bitteren Ärgers, weil d'Alembert, der durch die ungerechten Vergleiche, die sich die unwissenden Journalisten zwischen den beiden Rivalen erlaubten, verletzt war, die Revision der Arbeit desjenigen unternahm, der so viel mehr gepriesen wurde als er, und keine Mühe hatte, darin eine gewisse Anzahl von Fehlern zu erkennen, auf die er vielleicht mit zu viel Bitterkeit hinwies; hier lag der Ursprung des langen Streites, der die*

[1] D.h. für den Durchgang durch den sonnennächsten Punkt.

beiden Rivalen trennte, und der die letzten Jahre Clairauts verdüsterte.

Über das Ende der wissenschaftlichen Diskussion berichtet MONTUCLA in seiner "Histoire des Mathématiques" (MONTUCLA 1799, t. IV, S. 73): *Im Juni 1762 raffte Clairaut gewissermaßen seine Kräfte zusammen und veröffentlichte im "Journal des Savans" eine Abhandlung mit dem Titel "Nouvelles réflexions de M. Clairaut sur le sujet de la contestation qui s'est élevée entre M. d'Alembert et lui, à l'occasion de la comète de 1759", nicht nur über den Kometen von 1759, sondern auch über die Theorie des Mondes. Sie scheinen die Diskussion beendet zu haben; denn ich wüßte nicht, daß d'Alembert dem etwas hinzugefügt hätte; sei es, daß er dem nichts zu entgegnen hatte, sei es, daß er den unparteiischen Richtern die Urteilsfällung zugänglich genug gemacht zu haben glaubte. Es gebührt mir nicht, mich dazuzuzählen; aber dennoch würde ich sagen, daß es mir scheint, daß Clairaut bei alledem der Verdienst um das Verfahren zukommt; und was den Inhalt angeht, würde ich hinzufügen, daß mir scheint, daß die Öffentlichkeit Clairauts Arbeit, wenigstens in bezug auf seine Tabellen, über die seines Konkurrenten stellte, ohne etwas von der hohen Schätzung, die d'Alembert geschuldet wurde, zu verlieren. Besonders die Astronomen Englands scheinen ebenso darüber gedacht zu haben, was an dem Schweigen erkennbar wird, das sie gegenüber den Tabellen d'Alemberts bewahrt haben, und an der Anerkennung, die sie denen von Mayer, Euler und Clairaut entgegenbrachten, eine Anerkennung, bei der man d'Alemberts Tabellen keinen Platz einräumte. Dieser hatte nicht die Geduld, langen, auf die Beobachtungen bezogenen Rechnungen zu folgen; er wollte nur elegante Formeln, und kaum hatte er sie berechnet, glaubte er, alles beendet zu haben.*

CLAIRAUT und D'ALEMBERT waren zwei völlig verschiedene Charaktere. Mit dem eben beschriebenen wissenschaftlichen Streit dieser beiden Männer hatte ihre Feindschaft nicht begonnen, sondern war dadurch nur offen ausgebrochen. WHE-

WELL berichtet über CLAIRAUT (1840, S. 185): *Mit d'Alembert war er stets im Streite, auch waren ihre beiden Charaktere ganz verschieden. Clairaut war ein feiner Weltmann, der der Selbstliebe keines Anderen zu nahe trat, und d'Alembert war derb und rauh, obschon dabei gutmüthig und offen. "J'aime mieux d'être incivil qu'ennuyant", war des letzten Devise. Die Angriffe kamen meistens von d'Alemberts Seite, der ohne Zweifel der schärfere Denker war, und sie bezogen sich alle nur auf Clairaut's Schriften, die von diesem öfter zu hastig verfaßt wurden, weil er einen großen Theil seiner Zeit der großen und eleganten Welt zu widmen pflegte.*

Auch in methodischer Hinsicht hatten beide völlig unterschiedliche Ansichten. Wie bereits erwähnt, liebte CLAIRAUT die Klarheit und Einfachheit in der Darstellung. D'ALEMBERTs methodische Maxime hieß: *"Schreitet voran, der Glaube wird Euch kommen". Das heißt, daß wir bis zur Mitte einer gewissen Dunkelheit vordringen können, um das Licht zu suchen. Die Einsicht befindet sich bei der Eroberung der Wissenschaft immer in einer Mischung aus Licht und Dunkelheit* (GALDEANO 1899, S. 197).

Georges GUSDORF stellt in D'ALEMBERTs "Essai sur les Eléments de philosophie" eine starke Abneigung D'ALEMBERTs gegenüber allen nicht streng mathematischen Wissenschaften fest (GUSDORF 1972, S. 241): *D'Alembert, von abstraktem Geist, ist Verfechter eines mathematischen Radikalismus; man kann nur in dem Maß von Wissenschaft sprechen, wie ein Wissen mathematisch ausgedrückt werden kann. Das Inhaltsverzeichnis des "Essai sur les Eléments de philosophie", ein Werk, das sich vornimmt, die "Wahrheit, die man unbedingt kennen muß", zusammenzufassen, bescheinigt eine bezeichnende Gleichgültigkeit hinsichtlich der Disziplinen der Beobachtung, der Induktion, des Gedächtnisses und der Gelehrsamkeit. Im Detail werden dort nur die Mathematik, die Algebra, die Geometrie, die Mechanik, die Astronomie, die Optik, die Hydrostatik und Hydraulik und die "Allge-*

meine Physik" vorgestellt. Für ein Werk, das vorgibt, das Unternehmen der "Encyclopédie" zusammenzufassen, ist dies eine seltsame geistige und erkenntnistheoretische Beschränkung.

Auch wenn die Auseinandersetzungen mit D'ALEMBERT im Jahr 1762 beendet waren - zumindest was die Veröffentlichungen betrifft -, so belastete CLAIRAUT der Streit doch sehr. Er starb am 17. Mai 1765 in Paris nach einer kurzen Krankheit.

Abschließend noch einige Worte zu CLAIRAUTs Charakter. BOSSUT beschreibt CLAIRAUT so (zitiert nach HAMEL 1912, S. 81): *A character gentle and pliant, great politeness, and scrupulous care in never wounding the self-love of anybody, gave to Clairaut an existence and consideration in the great world which talent alone would not have obtained for him. Unfortunately for the sciences, he gave himself up too much to the general desire and rush to know and make much of him. Engaged for suppers and evening entertainments, carried away by a keen taste for the society of women, and wishing to ally pleasure to his ordinary work, he lost rest, health, and at length his life at the age of fifty-three, although his excellent physical constitution had appeared to promise a much longer career.*

4 Die Entwicklung der wissenschaftlichen Methode in Frankreich bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts

4.1 Vorbemerkung

Bei der Erörterung der Frage, welche Beweggründe CLAIRAUT hatte, seine Elementarwerke "Eléments de géométrie" und "Eléments d'algèbre" in heuristischer Darstellungsweise zu verfassen, sind einige Teilantworten bereits durch die Untersuchung des Lebenswegs von CLAIRAUT unter Berücksichtigung seiner Zeitgenossen angedeutet worden. Bei einer umfassenden Antwort auf die gestellte Frage kommt man aber nicht umhin, nicht nur den Lebensweg CLAIRAUTs selbst zu verfolgen, sondern sowohl die spezielle Entwicklung der Mathematik in Frankreich, insbesondere der Kritik an EUKLID, zu untersuchen, als auch allgemeine Untersuchungen anzustellen über gewisse wissenschaftstheoretische, philosophische, eventuell sogar gesellschaftliche Themenbereiche, denn CLAIRAUT war nicht nur ein französischer Mathematiker des 18. Jahrhunderts, er war gleichzeitig Zeitgenosse der vorrevolutionären Zeit, er war Freund VOLTAIREs, des wohl bedeutendsten Denkers der Aufklärung, er war überzeugter Anhänger der NEWTONschen Theorien, und NEWTON hat das 18. Jahrhundert gerade nicht nur durch seine physikalischen und mathematischen Forschungen, sondern insbesondere durch seine "regulae philosophandi" und durch die Methode seiner Forschungen beeinflußt. CLAIRAUT war aber auch wissenschaftlicher Nachfahre DESCARTES', von dem wohl jeder - zumindest französische - Wissenschaftler nach dem 17. Jahrhundert zutiefst beeinflußt worden ist. Wie bereits erwähnt, war diese Beeinflussung nicht nur historisch gegeben, da bis tief ins 18. Jahrhundert hinein die meisten Mitglieder der "Académie des Sciences", deren Mitglied CLAIRAUT war, Anhänger der DESCARTESschen Lehren waren, die, ähnlich wie

bei NEWTON, nicht nur die wissenschaftlichen Forschungen, sondern insbesondere auch die wissenschaftliche Methode beeinflußten.

Unter diesem Aspekt - und nur unter diesem - sind die folgenden Untersuchungen in diesem Kapitel zu verstehen. Bei der Untersuchung DESCARTES', seines Wissenschaftsbegriffs, seiner wissenschaftlichen Methode usw. geht es also nicht darum, ein Bild zu entwerfen, das dem heutigen Forschungsstand entspricht, sondern darum, welches Bild die Wissenschaftler der Mitte des 18. Jahrhunderts von DESCARTES hatten. Dieses Bild läßt sich glücklicherweise gut nachzeichnen anhand der großen "Encyclopédie" von DIDEROT und D'ALEMBERT, die - wie bereits erwähnt - in den Jahren von 1751 bis 1780 veröffentlicht wurde, insbesondere anhand ihres von D'ALEMBERT verfaßten "Discours préliminaire".

Es bedarf beinahe kaum einer Erwähnung, daß es an dieser Stelle auch nicht darum gehen kann, eine - wie auch immer geartete - Vollständigkeit in der Beschreibung von DESCARTES und seiner Lehren anzustreben. Dazu ist dieser Themenbereich viel zu umfassend und zu komplex, zum anderen würden weite Teile dieses Bereichs mit unseren Untersuchungen nichts zu tun haben. Denn hier soll im wesentlichen das Werk CLAIRAUTs untersucht werden, nicht in der Hauptsache das von DESCARTES. Analoges gilt natürlich auch für NEWTON und alle weiteren Wissenschaftler, die im folgenden genannt sind.

Insbesondere gilt die eben gemachte Bemerkung über die Vollständigkeit für diejenigen Untersuchungen, die die französische Aufklärung betreffen. Ein geschlossenes Bild jener Zeit läßt sich aus der Sichtweise jener Zeit natürlich nicht geben, und heutzutage belegen Fachzeitschriften wie etwa "Dix-huitième Siècle", die erst 1969 gegründet worden ist, sowie "Studies on Voltaire and the Eighteenth Century", wie umfangreich und unabgeschlossen die Untersuchungen über die Aufklärung gegenwärtig noch sind.

Den Einfluß auf das wissenschaftliche Frankreich des 18.

Jahrhunderts mit DESCARTES beginnen zu lassen, ist sicherlich zu spät angesetzt. DESCARTES ist nicht zu verstehen, ohne daß man weiß, worauf er aufgebaut hat[1] und gegen welchen Wissenschaftsbegriff er anzukämpfen hatte. Zum anderen gab es bereits vor DESCARTES Wissenschaftler - wie etwa Francis BACON und Galileo GALILEI -, die NEWTON und seinen Anhängern wesentlich nähergestanden haben als DESCARTES.

Eine getrennte Untersuchung der Entwicklung der mathematischen Methode in Frankreich - die insbesondere eine Untersuchung der Kritik an EUKLID ist - und der allgemeinen wissenschaftlichen Methode erschien mir als unzweckmäßig, da die Mathematik und die Entwicklung ihrer Methode sicher nicht unabhängig und isoliert von den anderen Wissenschaften betrachtet werden kann, um so mehr, als die heutige Trennung zwischen den verschiedenen Wissenschaften damals noch nicht vollzogen war. CLAIRAUT hätte sich selbst wohl nicht als Mathematiker bezeichnet, sondern eher als Naturwissenschaftler. Seine unterschiedlichsten mathematischen, physikalischen und astronomischen Abhandlungen belegen dies. Zum anderen wäre es bei einer getrennten Untersuchung für den Leser sehr schwer, festzustellen, welche Entwicklungen zeitlich parallel liefen, welche sich gegenseitig bedingten, welche sich behinderten usw. Aus diesem Grunde habe ich die Untersuchung der Entwicklung der mathematischen Methode in Frankreich in die allgemeine Untersuchung der wissenschaftlichen Methode eingebettet.

---

[1] Obwohl er selber immer betont hat, daß er auf niemandem aufgebaut hat.

4.2 Zur wissenschaftlichen Methode vor DESCARTES

4.2.1 Der Beginn der Kritik an EUKLID

Für die Verbreitung der Bücher EUKLIDs in Westeuropa waren zwei Ereignisse von Bedeutung, deren Zusammenwirken erst diese rasche Verbreitung ermöglichte: Als im Jahr 1453 die Türken unter Mohammed II. Konstantinopel eroberten, gelangten im Gefolge griechischer Flüchtlinge griechische Manuskripte in westeuropäischen Besitz, so daß die bis dahin vorhandenen Übersetzungen der "Elemente" EUKLIDs wesentlich verbessert werden konnten; und etwa zur gleichen Zeit erfand GUTENBERG die Buchdruckerkunst, die die Verbreitung dieser verbesserten EUKLID-Übersetzungen sehr begünstigte. So wurde die erste gedruckte Ausgabe der "Elemente" im Jahr 1483 in Venedig veröffentlicht. Diese Ausgabe war allerdings noch eine Übersetzung aus dem Arabischen von CAMPANUS. Weitere Auflagen dieser Ausgabe erschienen in Ulm 1486 und in Basel 1491. Die erste lateinische Ausgabe, eine Übersetzung des griechischen Originals von Bartholomaeus ZAMBERTUS, erschien 1505 in Venedig. In dieser Ausgabe wurde die Übersetzung von CAMPANUS heftig kritisiert, was im Jahr 1509 PACIOLI dazu veranlaßte, eine Ausgabe herauszugeben, deren stillschweigendes Ziel es wohl war, CAMPANUS zu rehabilitieren. Im Jahr 1516 erschien eine weitere EUKLID-Ausgabe in Paris. Die erste Ausgabe der "Elemente" in Griechisch wurde 1533 in Basel herausgegeben, von Simon GRYNAEUS. Hundertsiebzig Jahre lang war diese die einzige griechische Ausgabe der "Elemente", bis 1703 David GREGORY in Oxford das Gesamtwerk EUKLIDs im Original herausbrachte. Die erste Übersetzung aus dem Griechischen ins Englische unternahm 1570 "H. Billingley, Citizen of London". Eine englische Ausgabe der "Elemente" und der "Data" wurde 1758 von Robert SIMPSON (1687 - 1768), Professor der Mathematik an der Universität Glasgow, veröffentlicht. Eine eng an den griechischen Text angelehnte

Übersetzung ins Englische wurde von James WILLIAMSON erstellt, deren erster Band 1781 und der zweite 1788 in Oxford erschien. (CAJORI 1914, S. 245-246.)

Die verschiedenen EUKLID-Ausgaben dienten lange Zeit als Grundlage für den Unterricht in Elementargeometrie, *und zwar zumeist in der Landessprache, in zweckmäßiger Umgestaltung und Verkürzung der Beweise und mit erläuternden Beifügungen. Diese Form der Darbietung herrscht vor allem in England, wo die ausgezeichnete Bearbeitung von SIMSON (seit 1756) großen Erfolg hat. Hingegen ist EUKLID aus dem Unterrichtsbetrieb in Frankreich fast völlig verbannt. Hier setzt sich CLAIRAUTs Einführung (1741) durch ...* (HOFMANN 1957, S. 45).

Aus diesen Worten allerdings schließen zu wollen, CLAIRAUT wäre in Frankreich der erste gewesen, der die EUKLIDische Tradition unterbochen hat, wäre falsch. So bemerkt TATON (TATON 1952, S. 112): *In der Elementargeometrie boten die Elemente des Euklid ein Modell von Strenge, das, wenn es dem Hauptinteresse der Logiker in großem Maße genügte, einige Lehrbuchautoren durch seine Trockenheit etwas abstieß. Wenn diese Elemente auch in England und Deutschland weiterhin als ein Darstellungsmodell angesehen werden, an dem man höchstens einige Detailverbesserungen anbringen kann, zeichnet sich in Frankreich eine ziemlich starke Strömung zugunsten einer Änderung der Darstellung der geometrischen Prinzipien in eine anschaulichere Richtung ab. Diese Strömung, die schon 1667 in den "Nouveaux Eléments de Géométrie" von Arnauld erscheint, bekannter unter dem Namen der "Géométrie de Port-Royal", erlebt in Clairauts "Eléments de Géométrie" von 1741 einen Höhepunkt. Halten wir hiernach fest, daß dieser Veröffentlichung fünf Jahre später die "Eléments d'Algèbre" folgten, die von dem gleichen Anliegen eingenommen waren, Anschaulichkeit zu pädagogischen Zwecken zu gebrauchen.*

Auch für SERGESCU beginnt die intuitive Richtung in Frankreich erst mit ARNAULD und der "Géométrie de Port-Royal" (SERGESCU 1947-48, S. 82-83): *Anhand der Rezensionen über*

die Geometriebücher kann man den Fortschritt der intuitiven Denkweise verfolgen, die von Arnauld eingeleitet wurde, und die im 18. Jahrhundert einen gewaltigen Ausdruck in der Geometrie von Clairaut erhalten sollte.

Die Abkehr von der EUKLIDischen Strenge fand aber nicht nur in Frankreich statt und begann nicht erst 1667 mit Antoine ARNAULD und der "Géométrie de Port-Royal". TATON faßt die Entwicklung bis zum Ende des 18. Jahrhunderts so zusammen (TATON 1958, S. 457): *Die Ausbreitung des Mathematikunterrichts im Laufe des 18. Jahrhunderts zog die Veröffentlichung zahlreicher Geometriehandbücher nach sich, von denen einige unleugbar neue Elemente lieferten. Während in England die Übersetzung der Elemente Euklids von Barrow (1655) bis 1751 immer wieder neu herausgegeben wird, erfahren andere Übersetzungen einen lebhaften Erfolg, darunter die von J. Keill (1708), R. Simson (1756, fast 30 Auflagen) und die Bearbeitung von J. Playfair (1795). In den anderen Ländern des Westens geben die meisten Lehrhandbücher die Strenge und den Formalismus Euklids zugunsten einer konkreteren und dem neuen pädagogischen Interesse gerechter werdenden Darstellung auf. Während der Unterricht in Deutschland einen entschieden praktischen Charakter annahm, konkurrierten in Frankreich die für die Praktiker bestimmten Werke, wie das von S. Leclerc, mit anderen Handbüchern, die sich, dem Beispiel von Ramus (1569) und Antoine Arnauld (1667) folgend, bemühten, die Prinzipien der Geometrie natürlicher darzustellen als Euklid. Und Clairaut erachtet es nicht unter seiner Würde, "Anfangsgründe der Geometrie" zu veröffentlichen (Paris, 1741), in denen er sich bemüht, durch einen weiten Appell an die Intuition den Weg der Entdeckung wiederzufinden, wobei er jede penible Strenge zurückweist. Der Triumph der enzyklopädischen Ideen und des Sensualismus von Condillac trägt zum Erfolg dieser neuen Methode bei, gegen die am Ende des Jahrhunderts eine deutliche Reaktion aufkommt. Diese Rückkehr zur Strenge wird in zwei Handbüchern illustriert, deren zahlreiche Auflagen und Übersetzungen den*

Geometrieunterricht in vielen Ländern des Westens dauerhaft beeinflußten: die "Elemente der Geometrie" von Legendre (Paris, 1794) und die von S.F. Lacroix (1799).

Auch für ITARD beginnt die Abkehr von EUKLID, die - wie er in den ersten beiden Sätzen schreibt - bis heute anhält, mit Petrus RAMUS (ITARD 1939-40, S. 27-28): *In Frankreich ignoriert der geometrische Elementarunterricht die Elemente des Euklid heutzutage nahezu völlig. Wir werden versuchen ..., die bezeichnendsten historischen Tatsachen aufzuführen, die erklären, wie diese Abneigung gegenüber dem ältesten Monument der Elementargeometrie zustande kam, und wie es in Vergessenheit geraten konnte.*
Ein erster scharfer Angriff auf die Elemente des Euklid wurde von Pierre LA RAMÉE, alias Ramus (1515 - 1572) geführt, jedoch scheinen die Massaker von Saint-Barthélemy den Einfluß der Ramisten in Frankreich, der im Gegensatz dazu im rheinischen Deutschland beachtlich war, beendet zu haben.
Die Elemente des Euklid bleiben noch ein Jahrhundert lang das überall am meisten bekannte Lehrwerk.
Ein neuer Angriff, diesmal siegreicher Art, wird von den "Messieurs de Port-Royal" ausgelöst, zunächst in ihrem Werk "Logique ou l'art de penser" (1662), später in ihrer Geometrie von 1667.
In der Logik wird die Methode Euklids einer heftigen Kritik ausgesetzt.

Der Beginn der Kritik an EUKLID in Frankreich läßt sich also an Pierre (de) la RAMÉE, lateinisch Petrus Ramus, festmachen. Er wurde 1515 in Cuts nahe Noyon geboren und starb als "Lecteur royal" im Jahr 1572. Für LEBESGUE war er nicht nur *ein großer Mathematiker, er war ein großer Mensch; groß durch sein Werk und sein Wissen, groß durch sein Talent und seinen Charakter* (LEBESGUE 1957, S. 210). Er beschreibt im folgenden RAMUS' Kritik an der überkommenen scholastischen Tradition (S. 211-212): *Im Alter von einundzwanzig Jahren unterstützte er zum Erhalt des Titels "Maître ès-arts" diese These: daß alles, was Aristoteles*

gesagt hatte, falsch war. Er ging mit so viel Geschicklichkeit und Scharfsinn vor, er fand so günstige Argumente für seine skandalöse und gewissermaßen ketzerische These, daß er trotz der Anstrengungen der gesamten Fakultät großen Erfolg erntete.

Dieses erste öffentliche Auftreten ist ein Abbild seines ganzen Lebens. Er ist Konventionen und Autorität gegenüber unempfindlich; sie hindern ihn niemals daran, nachzudenken, die Dinge richtig zu sehen, sich vom gesunden Menschenverstand leiten zu lassen ...

Auch als Lehrer führte Ramus Dienste aus, die wenig auf Mathematik hinwiesen. Sein Unterricht in der griechischen und lateinischen Philosophie bezog sich auf die unterschiedlichsten Gegenstände; von 1559 an befaßte er sich mit Mathematik. Durch seine gut besuchten Kurse wurde er oft berufen, und fünfzig Jahre lang waren alle französischen Mathematiker ehemalige Schüler von Ramus. Außerdem stattete Ramus den Unterricht mit fehlenden Büchern aus. Mit Hilfe seiner Schüler erstellte er nach den alten griechischen Texten Unterrichtswerke, die über sechzig Jahre lang benutzt wurden, und von denen es zahlreiche Auflagen und Übersetzungen gibt.

Seine Studien zur Logik erlaubten es ihm, die Darlegung der Mathematik unbestreitbar voranschreiten zu lassen, obgleich er sich manchmal mehr als nötig von Euklid entfernte. Er wurde von gewissen Leuten als "ketzerisch an Euklid wie an Aristoteles" erklärt.

Noch deutlicher bringt CAJORI RAMUS' Verhältnis zu EUKLID und zur scholastischen Tradition zum Ausdruck (CAJORI 1914, S. 275-276): *Thus we read of Petrus Ramus (1515-1572) in France being forbidden on pain of corporal punishment to teach or write against Aristotle. This royal mandate induced Ramus to devote himself to mathematics; he brought out an edition of Euclid, and here again displayed his bold independence. He did not favour investigations on the foundations of geometry; he believed that it was not at all desirable to carry everything back to a few axioms;*

whatever is evident in itself, needs no proof. His opinion on mathematical questions carried great weight. His views respecting the basis of geometry controlled French textbooks down to the nineteenth century. In no other civilized country has Euclid been so little respected as in France. A conspicuous example of French opinion on this matter is the text prepared by Alexis-Claude Clairaut in 1741.

RAMUS' ganzes Leben war ein Kampf für die Erneuerung und die Modernisierung der Wissenschaft. Er war nicht nur ein großer Pionier auf dem Gebiet der Mathematik, *sondern seine Ambition ist größer, denn Ramus ist zunächst heftiger Gegner des Pseudo-Aristotelismus der degenerierten Scholastik. Er bemüht sich, die Prinzipien einer neuen Logik freizulegen, was eine Reform des Verstehens voraussetzt, d.h. eine Reform des Unterrichtens, und zwar auf alle Wissensgebiete ausgeweitet, ohne die Botanik oder die Medizin zu vergessen. Er besteht unablässig auf der Bedeutung der technischen Verfahren. Die Wissenschaft, die er entwirft, endet in konkreter Anwendung in den Werkstätten der Handwerker und den Läden der Geldwechsler. Schon kündigt sich die Denkweise des experimentellen Rationalismus und des Empirismus an, die den französischen Enzyklopädisten durch die Vermittlung von Bacon überliefert wird. In seinem Projekt zur Reform der Universität im Jahre 1562 fordert er die Einrichtung von Mathematik- und Physikkursen an der "Faculté des Arts"* (GUSDORF 1977, S. 23).

Trotz alledem blieb RAMUS gefangen im Geist seiner Zeit. *Der Anti-Aristoteliker Ramus entwickelt seine Physik angelehnt an Aristoteles. Für ihn stellt die Physik, genau wie für Aristoteles, eine Philosophie der Natur dar* (GUSDORF 1977, S. 24). Er will EUKLID nicht abschaffen, sondern nach eigenen Aussagen "korrigieren und verbessern": *Im Jahre 1566 erhebt sich Ramus anläßlich einer Berufung auf den Lehrstuhl für Mathematik des Collège Royal heftig gegen die Kandidatur seines Kollegen und Gegners Charpentier, da dieser die griechische Sprache nicht beherrscht.*

Denn, protestiert Ramus, "der Mathematikprofessor, besonders der königliche, muß vor allem die lateinischen und griechischen Briefe, die Rhetorik, die Logik, und zwar nicht die nichtige sophistische, sondern eine solide und praktische Logik, studiert und angewandt haben". Die Beherrschung der Mathematik setzt die philosophische Bildung voraus, damit der Professor "nicht nur interpretieren, sondern auch Euklid, Archimedes, Ptolemäus und all die anderen Prinzen und Helden der Mathematikwissenschaft korrgieren und verbessern kann" (GUSDORF 1977, S. 24; dort zitiert nach "Petri Rami actio secunda pro regia mathematicae professionis cathedra", 1566, in P. Rami et A. Talaei Collectaneae, S. 541).

4.2.2 Zur Wissenschaft vor DESCARTES

Die allgemeine Wissenschaft vor DESCARTES wurde also im wesentlichen - bis auf wenige Ausnahmen, insbesondere GALILEI - von der scholastischen Tradition beherrscht. Diese war auf der einen Seite gekennzeichnet durch ihre absolute Anlehnung an die griechische Wissenschaft, wie sie beispielsweise durch ARISTOTELES und EUKLID überliefert war, zum anderen durch ihre völlige Abhängigkeit von der Theologie. Der Begriff der Wissenschaft war hier völlig statisch, "wissenschaftlich tätig sein" wurde nicht verstanden als ein Suchen nach der Wahrheit, sondern als Interpretation und als Anwendung bereits gegebener Wahrheiten, die in den Schriften des ARISTOTELES und anderer vorlagen.

Ein typisches Beispiel hierfür war die Reaktion der kirchlichen Vorgesetzten des Jesuitenpaters SCHEINER, als dieser im Jahr 1611 die Sonnenflecken entdeckte[1] (GUSDORF 1969, Bd.I, S. 92): *Ich habe mehrere Male meinen gesamten Aristo-*

[1] Übrigens unabhängig von GALILEI (1609) und FABRICIUS.

teles gelesen, und ich kann Euch versichern, daß ich nichts dergleichen gelesen habe. Geht hin, mein Sohn, beruhigt Euch und seid sicher, daß es Fehler Eurer Gläser oder Eurer Augen sind, die Ihr für Sonnenflecken anseht.

Mit diesem für die damalige Zeit typischen Beispiel wird bereits überaus deutlich, welche wissenschaftstheoretische Kluft innerhalb eines Jahrhunderts zu überbrücken war, ausgehend von der eben zitierten bewußten Ablehnung konkreter sinnlicher Beobachtungen zum "Primat der konkreten Existenz", einer der wissenschaftlichen Hauptforderungen der französischen Aufklärung, auf die ich noch näher eingehen werde.

Das Verhalten der kirchlichen Oberen war nicht etwa ein Einzelfall, sondern es war sogar kirchenrechtlich festgelegt. GUSDORF berichtet weiter (S. 111): *Die "Exercices spirituels" des Ignaz von Loyola, genehmigt von Papst Paul III. im Jahr 1548, die das intellektuelle Regelsystem der Jesuitengesellschaft bilden, enthalten als Anhang eine Reihe von Regeln "Über die Unterwerfung unter die Kirche". Die dreizehnte dieser Regeln sagt, daß "wir, um uns in keiner Weise von der Wahrheit zu entfernen, immer bereit sein müssen zu glauben, daß das, was uns weiß erscheint, schwarz ist, wenn die Kirchenhierarchie es so entscheidet".*

Selbst für die führenden Wissenschaftler jener Zeit bestand das Betreiben von Wissenschaft in der Interpretation griechischer Texte (GUSDORF 1977, S. 46): *In den Augen der größten Genies dieser Zeit war die Wahrheit in den Schriften des Aristoteles enthalten, und es genügte, durch Kommentare und verschiedene Erklärungen sie daraus ans Tageslicht zu bringen. Die Humanisten der Renaissance überschreiten nach allen Seiten den aristotelischen Horizont der Scholastik; sie vermehren in beachtlichem Maß die überlieferten Texte, aber in bezug auf diese Texte ist ihre Haltung kaum von der der mittelalterlichen Gelehrten verschieden... Auch für sie handelt es*

sich darum, die in den Texten, die eine unbestrittene Autorität darstellen, enthaltene Wahrheit ans Tageslicht zu bringen. Sie begnügen sich damit, Euklid, Archimedes, Ptolemäus, Galenus, Plinius, Strabo und die verschiedenen Handbücher, die die Erwerbungen der hellenischen Meister verdichtet haben, zu veröffentlichen und zu interpretieren.

Auch für E. CASSIRER ist der Wissenschaftsbegriff des Mittelalters ein rein statischer (1973, S. 50): *Die Aufgabe des mittelalterlichen Denkens bestand wesentlich darin, die Architektonik des Seins in sich nachzubilden und sie in klaren Grundlinien zu beschreiben. In dem religiösen System des Mittelalters, wie es durch die Scholastik fixiert wird, wird jeder Realität ihre feste und eindeutige Stelle zugewiesen; und mit dieser ihrer Stelle, mit dem größeren oder geringeren Abstand, in dem sie von dem Sein der höchsten Ursache steht, ist auch ihr Wert völlig bestimmt. Hier kann und hier darf es keinen Zweifel geben; hier weiß sich alles Denken geborgen in einer unverbrüchlichen Ordnung, die es nicht zu erschaffen, sondern lediglich zu empfangen hat. Gott, Seele, Welt: sie bilden die drei großen Angelpunkte des Seins; und ihnen gemäß gliedert sich das System des Wissens.*

Für GUSDORF hat das Wissen jener Zeit einen eher kontemplativen Charakter (1969, Bd.I, S. 262-263): *Bis zum 17. Jahrhundert ist das Studium der Natur also nur eine Erklärung dessen, was man schon weiß; kein Anzeichen könnte die vorgegebene Ordnung in Frage stellen, die sowohl im Faktischen als auch im Gesetzlichen Gültigkeit besitzt. Das Wissen erhält einen Charakter ästhetischer oder religiöser Kontemplation. Es geht nicht darum, die Ordnung der Welt zu modifizieren, sondern nur darum, ihre Harmonie zu entdecken, um sie zu preisen.*

Und an anderer Stelle (GUSDORF 1977, S.44-45): *Für die Menschen der Antike ist das Ideal der wissenschaftlichen Erkenntnis von theoretischer Art, im platonischen Sinn des Wortes, das heißt, von kontemplativer Art. Das wahre*

Denken ist gleichwertig mit einer Inbesitznahme seines Objekts, die gänzlich gewollt wird. Der Biologe Aristoteles, der Astronom Ptolemäus wissen sehr wohl, daß sie Vorgänger gehabt haben, deren Arbeiten sie kritisieren und benützen. Aber sie zweifeln nicht an der Endgültigkeit ihres eigenen Werks. Wissenschaft ist gleichbedeutend mit Beendigung und Perfektion; und die Gelehrten des Mittelalters oder der Renaissance respektieren diese Sichtweise, wenn sie sich damit begnügen, Aristoteles oder Euklid zu kommentieren, als ob die überlieferten Autoren ein für alle Mal das Schema des Wissens definiert hätten.
Erst in der modernen Epoche ist das Wort "Wissenschaft" synonym mit "Untersuchung" und "Forschung" geworden. Der große Teil der westlichen Tradition betrachtet Unfertigkeit als ein Zeichen von Unzulänglichkeit, unvereinbar mit dem Charakter von Perfektion, den man der Wissenschaft zuschreibt. Der Wissenschaftler ist derjenige, der weiß; es ist nicht zulässig, daß er - auch nur relative - Unwissenheit zugibt, was wie ein Zeichen von Skeptizismus aussähe. Zweifellos hat der Wissenschaftler nicht immer gewußt; er ist in die Wissenschaft eingetreten, aber diese Lehrzeit war schnell und total.

Das Urteil, das in dem bereits erwähnten "Discours préliminaire" der "Encyclopédie" von DIDEROT und D'ALEMBERT über die Scholastik gefällt wird, ist sehr hart. Es heißt dort (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751, S. XXIII): *Die Scholastik, die die gesamte angebliche Wissenschaft der Jahrhunderte der Unwissenheit bildete, schadete auch noch dem Fortschritt der wahren Philosophie in diesem ersten Jahrhundert der Aufklärung. Man war seit einer sozusagen undenklichen Zeit überzeugt, daß man in ihrer vollen Reinheit die Doktrin des Aristoteles besaß, von den Arabern kommentiert, und verfälscht durch tausend absurde und kindliche Hinzufügungen; und man dachte noch nicht einmal daran, sich zu versichern, ob diese barbarische Philosophie wirklich die dieses großen Mannes war, so viel Respekt hatte man vor den Alten. Eine Menge von Leuten, geboren und gefestigt in*

ihren Irrtümern durch die Erziehung, glaubte sich so sicher auf dem Weg der Wahrheit, daß ihnen niemals auch nur der geringste Zweifel gekommen ist.

Als Vermittler zwischen den Ideen von RAMUS und denen der französischen Enzyklopädisten im 18. Jahrhundert wurde bereits Francis BACON (1561 - 1626) angesprochen. Im eben erwähnten "Discours préliminaire" der "Encyclopédie" wird *der unsterbliche Kanzler von England, Francis Bacon ... zur Spitze jener berühmten Persönlichkeiten* gerechnet, die sich nicht in wissenschaftlicher und philosophischer Hinsicht *von ihren Zeitgenossen Scheuklappen* anlegen ließen. Die Enzyklopädisten schätzten an BACON zum einen sein Eintreten für die *philosophie expérimentale*, zum anderen seine Idee der Erstellung einer Geschichte der Wissenschaften, worauf ich später noch genauer eingehen werde.

Im Artikel "Baconisme" der "Encyclopédie" werden zunächst einige Regeln aus dem "Novum organon" von BACON zitiert: *Es gibt zwei Wege, die zur Wahrheit führen können. Auf dem einen erhebt man sich von der Erfahrung zu sehr allgemeinen Axiomen, dieser Weg ist bereits bekannt: auf dem anderen erhebt man sich von der Erfahrung zu Axiomen, die nach und nach allgemein werden, bis man bei sehr allgemeinen Dingen anlangt. Dieser Weg liegt noch brach; denn die Menschen werden der Erfahrung überdrüssig und wollen auf einen Schlag zu allgemeinen Axiomen gelangen, um sich auszuruhen.*
Beide Wege beginnen mit der Erfahrung und den speziellen Dingen; aber ansonsten sind sie sehr verschieden: auf dem einen streift man die Erfahrung nur; auf dem anderen macht man bei ihr halt: auf dem ersten errichtet man gleich mit dem zweiten Schritt allgemeine und abstrakte Prinzipien; auf dem zweiten erhebt man sich nach und nach zu universellen Dingen, usw.
Danach heißt es im selben Artikel weiter: *Mit einem Wort, vor dem Kanzler Bacon hat niemand die experimentelle Philosophie gekannt; und von allen physikalischen Erfahrungen, die man seit ihm gemacht hat, gibt es kaum eine, auf die*

er nicht in seinen Werken hingewiesen hätte.

Der "Discours préliminaire" macht bezüglich BACON noch auf einen weiteren wesentlichen Aspekt aufmerksam, der das 18. Jahrhundert stark vom 17. Jahrhundert abhebt: War das 17. Jahrhundert noch geprägt vom "esprit de système", dem Systemgeist der Philosophien von DESCARTES, LEIBNIZ usw., so verbannt das 18. Jahrhundert dieses Geist gänzlich zugunsten des "esprit systématique". Es heißt im "Discours préliminaire" über BACON (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751, S. XXIV): *Als Feind der Systeme sieht er die Philosophie nur als den Teil unseres Wissens an, der uns besser und glücklicher machen soll: Er scheint sie auf die Wissenschaft von den nützlichen Dingen einzuschränken und empfiehlt vor allem das Studium der Natur.*

Auch für GUSDORF ist BACON derjenige - mehr als DESCARTES -, der den Übergang von der traditionellen Geisteshaltung des Mittelalters zur neuzeitlichen Geisteshaltung verkörpert (GUSDORF 1977, S. 25): *Besser noch als Descartes verkörpert sein Vorgänger Francis Bacon den Übergang von einer traditionellen Geisteshaltung, beherrscht durch die ehrerbietige Haltung gegenüber der Vergangenheit, zu einer Geisteshaltung des Widerspruchs und des Bruchs. Die freie intellektuelle Unternehmung gibt sich als Programm die Eroberung der Gegenwart und den Aufbau der Zukunft. Der Mensch des Westens fühlt sich seiner selbst genügend sicher, um sich aus dem geistigen Bereich jüdisch-hellenistischer Prägung herauszuwagen. Die Mechanistische Revolution des beginnenden 17. Jahrhunderts geht mit einer neuen Bestätigung des Menschen im Universum einher. Das mittelalterliche Wissen ist auf Gott zentriert; es findet in der Theologie die höchste Form. Der Humanismus der Renaissance entdeckt in den Humaniora das Prinzip der Erhöhung des Menschen; das Wissen entwickelt sich in Abhängigkeit von einem neuen Bewußtsein seiner selbst, gemäß ästhetischer und moralischer Normen. Die Wissenschaften moderner Zeiten bekräftigen die Vorherrschaft des Verhältnisses zur Welt, seit jener Zeit wichtiger als das*

Verhältnis zu Gott und das Verhältnis zu sich selbst. Die wesentliche Aufgabe ist es, die Ordnung der Dinge zu erkennen, deren Enthüllung schwieriger zu erreichen ist als jene der göttlichen Ordnung oder der Ordnung der Werte. Die Vernunft hört auf, eine passiv erhaltene Gabe zu sein, und erscheint nun als Einsatz eines dauernden Kampfes, der zum Guten geführt wird von einem endlich erwachsenen Menschen, der sich seiner Verantwortung bewußt ist. Die Wissenschaftler sind von nun ab die wahren Besitzer dieser rationalen und "natürlichen Magie", sehr verschieden von den übernatürlichen und illusorischen Magien, denn die "natürliche Magie" stimmt, um es mit Bacon zu sagen, mit der "operativen Wissenschaft" überein, die in der Lage ist, die Welt zum Wohle des Menschen zu verändern.

Den eben bereits angesprochenen Aspekt, daß BACON einer der ersten war, die Wissenschaft als eine in die Zukunft gerichtete Tätigkeit ansahen, führt GUSDORF an anderer Stelle noch genauer aus (GUSDORF 1977, S. 48): *Die humanistische Renaissance wollte eine Wiedergewinnung vergessener Werte sein; sie schaute in die Vergangenheit. Das Baconsche Denken wendet sich entschlossen in die Zukunft; bestärkt durch die Erwerbungen der Gegenwart, betrachtet sie die Zukunft als eine Dimension des Wachstums und der Entwicklung ... Das Baconsche Unternehmen will - in Anlehnung an die Seefahrer, die den Weg zu neuen Welten geöffnet haben - ein abenteuerliches Denken zu neuen Horizonten sein ... Das Denken Bacons stellt alles in Frage, es fragt nach allem; es hört nicht auf, Untersuchungs- und Forschungsprogramme aufzustellen. Wenn dem Begründer die Zeit gefehlt hat, das Stadium des Fragens zu verlassen, so hat er doch den Weg gebahnt und die gefangene Intelligenz von den etablierten Vorurteilen befreit. Andere werden weitergehen und die Säulen des Herkules überwinden.*

Wie bereits erwähnt, war BACON auch einer der ersten, die den Wert einer allgemeinen Geschichte der Wissenschaft erkannt haben (GUSDORF 1977, S. 48; zitiert nach: Francis Bacon, Advancement of Learning, Book II, 1604): *"Ich kann*

in voller Wahrheit versichern, daß wir Bedarf an einer exakten Geschichte des Wissens haben, die die Vorzeiten und die Ursprünge der Wissenschaft enthält, die verschiedenen Sekten, die Traditionen, die verschiedenen Typen der Ausführung und der Organisation; die Momente des Aufblühens, der Widersprüche, des Niedergangs, der Demütigung und des Vergessens; mit ihren Gründen und Anlässen und allen anderen Ereignissen, die das Wissen quer durch die Zeitalter der Menschheit betreffen." Ein derartiges Werk ist nicht nur dazu bestimmt, die Neugierde oder die Gelehrsamkeit zu befriedigen; seine Bestimmung ist viel ernster und wichtiger: "Es wird die Wissenschaftler vorsichtiger machen im Umgang mit der Wissenschaft und ihrer Verwaltung."

GUSDORF wertet BACONs Geschichtsverständnis als ein pädagogisches (GUSDORF 1977, S. 50): *In den Augen Bacons ist die Geschichte der Wissenschaft eine Pädagogik der Wissenschaft, ein Bewußtwerden der durch die vorangegangenen Generationen erworbenen Erfahrung. Die Zeit des Geheimnisses des gnostischen Individualismus und der Anleitung des Schülers durch den Meister sind von nun ab ein Marsch in eine fortschrittliche Zukunft ... Die erworbene Wissenschaft wird in eine Verheißung für die Zukunft umgewandelt. Die in den Köpfen verankerte Immobilität, die die Konzeption der Wissenschaft seit zweitausend Jahren regiert hatte, erscheint von nun an verjährt. Die Baconsche Bekräftigung läßt in entscheidender Weise bereits im voraus einen neuen Sinn und einen neuen Wert des Wissens erahnen.*

In der Reihe derjenigen, die den Übergang vom scholastischen zum modernen Wissenschaftsbegriff geschaffen haben, kann Galileo GALILEI (1564 - 1642) nicht fehlen, obwohl sein direkter Einfluß auf das wissenschaftliche Frankreich des 18. Jahrhunderts bei weitem nicht so groß war wie der von BACON oder etwa von NEWTON. Nachdem im "Discours préliminaire" der "Encyclopédie" DESCARTES, NEWTON, BACON und andere ausführlich gewürdigt worden sind, heißt es weiter (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751, S. XXVIII): *Die Grenzen*

dieses "Discours préliminaire" hindern uns, von mehreren berühmten Philosophen zu sprechen, die, ohne sich ebenso große Entwürfe vorgenommen zu haben wie die, die wir gerade erwähnt haben, trotzdem zum Fortschritt der Wissenschaft viel beigetragen haben, und die dadurch sozusagen eine Ecke des Schleiers gelüftet haben, der uns die Wahrheit verbarg. Darunter sind; Galilei, dem die Geographie so viel für seine astronomischen Entdeckungen verdankt, und die Mechanik für seine Theorie der Beschleunigung; ...[1]

Für GUSDORF ist GALILEI der erste moderne Wissenschaftler (GUSDORF 1969, Bd.I, S. 85): *Die Ehre Galileis besteht darin, der erste gewesen zu sein, der entschlossen in das moderne Universum des Wissens eingetreten ist. Die Philologen und Humanisten, die Historiker der Renaissance bleiben fasziniert von der Schatzinsel der antiken Kultur. Die gelehrten Astronomen Kopernikus, Tycho Brahe, selbst Kepler, tragen nur dadurch zum Fortschritt der Wissenschaft bei, indem sie rückwärts schauen, gefangen in den Gewohnheiten des Denkens und der traditionellen Wertsysteme. Auch Christoph Columbus entdeckte die Neue Welt, ohne jemals die Alte zu verlassen.*

Insbesondere trennte GALILEI als einer der ersten die Wissenschaft von der Theologie (GUSDORF 1967, S. 200): *Für Galilei, den ersten Wissenschaftler der neuen modernen Welt, ist das große Buch der Natur in Geraden, in Dreiecken, in Kreisen, in geometrischen Zeichen geschrieben, derart, daß der Bezug auf Gott als Schöpfer nicht länger unentbehrlich ist für denjenigen, der den Schlüssel zur mathematischen Sprache besitzt.*

Diese Mathematisierung markierte den Übergang vom scholastischen zum modernen Wissenschaftsbegriff (GUSDORF 1967, S. 381): *Die Keplerschen Gesetze, in den Jahren 1609 und 1619*

---

[1] Zur - wesentlich umfassenderen - Bedeutung GALILEIs aus heutiger Sicht vergleiche etwa: Georges Gusdorf, La révolution galiléenne, 2 Bände, 1969, Paris.

aufgestellt, sind die ersten Triumphe des mathematischen Geistes bei der Eroberung der Realität; sie stellen sozusagen die Urväter aller wissenschaftlichen Gesetze dar ... der "Himmlische Botschafter" (Nuntius sidereus), in dem Galilei die Resultate seiner Beobachtungen mit dem Teleskop mitteilt, datiert von 1610, und im Jahr 1632 veröffentlicht derselbe Galilei in italienischer Sprache seine "Gespräche über die zwei wesentlichen Systeme der Welt". In weniger als einem Jahrhundert hört das Universum auf, das zu sein, was es zweitausend Jahre lang war. Ein halbes Jahrhundert später, im Jahr 1687, werden die gewonnenen Resultate von Newton in seinen "Principia mathematica philosophiae naturalis" in einer genialen Synthese zusammengefaßt.

4.3 Zur Entwicklung der wissenschaftlichen Methode im 17. Jahrhundert, insbesondere bei DESCARTES

Bis zum 17. Jahrhundert und auch noch im 17. Jahrhundert war die Methode der Wissenschaften also im wesentlichen durch die Scholastik und dementsprechend durch eine starke Anlehnung an überlieferte Schriften von ARISTOTELES, EUKLID, PTOLEMÄUS und anderen gekennzeichnet. In ihrem Wesen und in ihrer Methode wurde Wissenschaft statisch gesehen. Die Wissenschaft weiterzuentwickeln war ein Widerspruch in sich, denn alles Wissen war bereits gegeben in den überlieferten Schriften, so daß als einzige Aufgabe der Wissenschaft verblieb, neuartige Phänomene entweder mit den Schriften in Einklang zu bringen - d.h. die Schriften so zu interpretieren, daß ein offensichtlicher Widerspruch vermieden wurde -, oder aber solche Phänomene als Sinnestäuschung abzulehnen, wie bei der Entdeckung der Sonnenflecken durch den Jesuitenpater SCHEINER. Dies war der allgemeine Zustand der Wissenschaften, als DESCARTES in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts begann, sich wissenschaftlich und philosophisch zu betätigen.

René DESCARTES wurde am 31.3.1596 in La Haye geboren. Von 1606 bis 1614 besuchte er das königliche Jesuitenkolleg von La Flèche. Bereits während dieser Zeit wurde er von den neuen wissenschaftlichen Entdeckungen fasziniert, so beispielsweise von der Entdeckung der Jupitermonde durch GALILEI im Jahr 1611. Ab 1614 studierte DESCARTES in Poitiers Jura.

Von 1618 bis 1628 unternahm er etliche Reisen in Europa, danach schrieb er sich 1629 als "Philosophe" an der Universität in Franeker ein, 1630 an der Universität von Leyden als "Mathématicien". Bereits während seiner Reisezeit begann er, Abhandlungen über verschiedenste Themenbereiche zu schreiben, so unter anderem im Jahr 1618 ein "Abrégé de Musique".

Der wohl größte Einfluß DESCARTES' auf das 18. Jahrhundert und auch auf die weiteren Jahrhunderte ging zum einen von seinem auch heute noch sehr bekannten "Discours de la méthode" aus, zum anderen von seinem großen Entwurf eines mathematisch-physikalischen Weltbildes.

Im "Discours de la méthode" berichtet DESCARTES, welche methodischen Regeln ihn bei seiner Erkenntnisfindung geleitet haben (DESCARTES 1957, S. 15): *Die erste Regel war, niemals etwas als wahr anzunehmen, was ich nicht klar (évidemment) als solches erkannte, d.h. alle Überstürzung und alle Vorurteile aufs sorgfältigste zu vermeiden, und nicht mehr in meine Urteile aufzunehmen, als was sich so klar und so distinkt meinem Geist darbieten würde, daß ich keine Veranlassung haben würde, es in Zweifel zu ziehen.*
... Die zweite, jede der Schwierigkeiten, die ich untersuchen würde, in so viele Teile zu zerlegen als nur möglich und als erforderlich sein würde, um sie in der besten Weise aufzulösen.
... Die dritte, der Ordnung nach meine Gedanken zu leiten, also bei den einfachsten und am leichtesten zu erkennenden Gegenständen zu beginnen, um nach und nach sozusagen gradweise bis zur Erkenntnis der zusammengesetztesten aufzu-

steigen, wobei ich selbst unter denen Ordnung voraussetze, die nicht in der natürlichen Weise aufeinander folgen.
... Und die letzte, überall so vollständige Aufzählungen und so allgemeine Übersichten anzustellen, daß ich sicher wäre, nichts auszulassen.
... Die langen Ketten von ganz einfachen und leicht einzusehenden Vernunftgründen, deren sich die Geometer zu bedienen pflegen, um zu ihren schwierigsten Beweisen zu gelangen, hatten mich darauf geführt, mir vorzustellen, daß alle Dinge, die unter die Erkenntnis der Menschen fallen können, unter einander in derselben Beziehung stehen, und daß, wenn man nur darauf achtet, kein Ding für wahr zu halten, das es nicht ist, und stets die Ordnung beibehält, um die einen von den anderen abzuleiten, es keine so entfernten Erkenntnisse geben kann, zu denen man nicht gelangte, noch auch so verborgene, die man nicht entdeckte[1].

Mit den letzten Worten wird bereits deutlich, daß DESCARTES die Sicherheit der mathematischen Erkenntnisfindung auf jegliche wissenschaftliche Erkenntnis übertragen wollte. Die drei Grundpfeiler der Erkenntnis waren für ihn die Evidenz, die Analyse und die Synthese.
Aus dem Text geht ebenfalls hervor, daß DESCARTES - ebenso wie NEWTON und alle weiteren modernen Wissenschaftler auch - an eine "natürliche Ordnung" der wissenschaftlichen Erkenntnis glaubte. Am Beispiel des Sternenhimmels erläutert er noch einmal seine Vorstellungen (BEYSSADE 1972, S. 67; in einem Brief an MERSENNE vom 10. Mai 1632):
... ich zweifle absolut nicht daran, daß zwischen ihnen (den Sternen) *eine natürliche Ordnung besteht, welche regel-*

---

[1] LEIBNIZ kritisiert diese Regeln später in einem Brief an GALLOIS aus dem Jahr 1677 so (LEIBNIZ 1840-90, Bd. 7, S. 21): *Diejenigen, die uns Methoden gegeben haben, geben zweifellos schöne Vorschriften, aber nicht die Mittel, sie auch zu beachten. Man muß, sagen sie, alle Dinge klar und deutlich begreifen, man muß von den einfachen zu den zusammengesetzten Dingen fortschreiten; wir müssen unsere Gedanken aufteilen etc. Aber das dient zu nicht viel, wenn man uns nicht mehr sagt.* Und an anderer Stelle vergleicht er sie mit Rezepten von Alchimisten (Bd. 4, S. 329): *Nimm, was du brauchst, handle, wie du mußt, und du wirst das erhalten, was du wünschst.* (Vgl. auch BOURBAKI 1971, S. 22.)

mäßig und festgelegt ist. Und die Kenntnis dieser Ordnung ist der Schlüssel und das Fundament der höchsten und perfektesten Wissenschaft, die der Mensch besitzen kann in bezug auf materielle Dinge; zumal man mit ihrer Hilfe a priori alle verschiedenen Formen und Essenzen der irdischen Körper kennen kann, wohingegen man sich ohne sie damit begnügen muß, sie a posteriori zu erraten, anhand ihrer Wirkungen.

Mit diesen Worten wird überaus deutlich, inwiefern sich DESCARTES von den Wissenschaftlern und Philosophen des 18. Jahrhunderts unterschied: Er glaubte, die grundlegenden Prinzipien der Physik als eingeborene Ideen a priori erkennen zu können, aus denen er dann deduktiv weitere physikalische Erkenntnisse bis hin zu speziellsten Phänomenen ableiten konnte. Denn für ihn gab *es nur zwei Quellen der Gewißheit: die Intuition und die Deduktion. Nur das hat Anspruch auf Wahrheit, was unmittelbar einsichtig, was in "gegenwärtiger Evidenz" (praesens evidentia) gegeben ist, oder was aus evidenten Voraussetzungen nach strengen logischen Regeln gefolgert werden kann*[1] (CASSIRER 1978, S. 25).

Bei der Entwicklung seines physikalischen Systems räumte DESCARTES der mathematischen Methode und der Evidenz daher einen höheren Stellenwert ein als den konkreten Erfahrungen, den genauen Beobachtungen und den Experimenten, so daß seine Physik letztlich in Widerspruch mit der Wirklichkeit geriet. Über das Verhältnis von Erfahrungen und "grundlegenden Prinzipien" berichtet er in der "Abhandlung über die Methode" (DESCARTES 1957, S. 52): *Ich bemerkte selbst betreffs der Erfahrungen, daß sie um so notwendiger*

---

[1] Damit ist implizit bereits ein weiterer Punkt angesprochen, der DESCARTES vom Wissenschaftsverständnis des 18. Jahrhunderts trennte. Denn als direkte Folge ist *der Erkenntnis- und Geltungswert der Tradition ... ein für alle Mal beseitigt. Eine Überlieferung, wie gut sie auch bezeugt sein und wie weit sie auch zurückreichen mag, kann niemals zu jener Art der Überzeugung führen, die die notwendige Bedingung und das Kriterium aller Wahrheit ist* (CASSIRER 1978, S. 25). Eine solche Haltung war dem erwachenden historischen Bewußtsein des 18. Jahrhunderts natürlich völlig entgegengesetzt.

sind, je weiter man in der Erkenntnis fortgeschritten ist. Zu Beginn nämlich tut man besser daran, sich nur derer zu bedienen, die sich von selbst unseren Sinnen darbieten, und die uns bei auch noch so geringem Nachdenken nicht entgehen können, als seltenere und nur auf Grund von Studien erhaltbare zu suchen. Der Grund dafür ist, daß diese selteneren häufig täuschen, wenn man die Ursachen der gemeinsten noch nicht kennt, und ferner, daß die Umstände, von denen sie abhängen, sozusagen stets so besonderer und geringfügiger Art sind, daß es recht schwierig ist, sie zu bemerken.

... Die Ordnung aber, die ich hierbei beobachtet habe, ist folgende gewesen: Zunächst habe ich versucht, ganz allgemein die Prinzipien oder ersten Ursachen alles dessen, was in der Welt ist oder sein kann, zu finden, ohne zu diesem Zweck etwas anderes in Betracht zu ziehen, als Gott allein, der sie geschaffen hat und auch ohne sie anders woher abzuleiten, als aus gewissen Samenkörnern von Wahrheiten, die von Natur in unseren Seelen vorhanden sind. Danach habe ich untersucht, welches die ersten und gewöhnlichen Wirkungen sind, die sich aus diesen Ursachen ableiten ließen. Dadurch habe ich, wie mir scheint, die Himmelsgewölbe, Gestirne, eine Erde und selbst auf dieser Wasser, Luft, Feuer, Mineralien und einige andere Dinge gefunden, die die allergemeinsten und einfachsten und infolgedessen am leichtesten zu erkennen sind.

Und in einem Brief an MERSENNE vom 23.12.1630 beschreibt DESCARTES überaus deutlich, daß Experimente nicht dazu geeignet sind, die Wahrheit zu finden (ADAM/TANNERY 1969, Bd. 1, S. 195-196): *Was die spezielleren Experimente angeht, so ist es unmöglich, dabei nicht viele zu machen, die überflüssig, ja sogar falsch sind, wenn man die Wahrheit der Dinge nicht kennt, bevor man sie macht.*

Damit sind bereits fast alle Punkte genannt, die für das 18. Jahrhundert zu Hauptkritikpunkten an DESCARTES wurden: sein Vertrauen auf die eingeborenen Ideen, seine Abneigung gegenüber konkreten sinnlichen Beobachtungen und Ex-

perimenten, die völlige Unhaltbarkeit seines physikalischen Systems und seine Abneigung gegenüber jeder Tradition und Historie. Hinzu kommt noch die Skepsis des 18. Jahrhunderts gegenüber DESCARTES' philosophischem Systemdenken, das im 17. Jahrhundert allerdings sehr weit verbreitet war.

Im "Dictionnaire philosophique" von VOLTAIRE heißt es im Artikel "Cartésianisme" (VOLTAIRE 1878, t. 18): *Die wahre Physik besteht daher darin, alle Effekte genau zu bestimmen. Wir würden die ersten Gründe kennen, wenn wir Götter wären. Uns ist es gegeben zu rechnen, zu wiegen, zu messen, zu beobachten: das ist die Naturphilosophie; fast der gesamte Rest ist eine Chimäre.*
Das Unglück Descartes' war es, während seiner Italienreise nicht Galilei aufgesucht zu haben[1]*, welcher rechnete, wog, maß, beobachtete.*

---

[1] Es mag sein, daß DESCARTES GALILEI bei seinen Italienreisen nicht aufgesucht hat. Der eigentliche Grund dafür, daß DESCARTES nicht "rechnete, wog, maß und beobachtete", lag aber wohl nicht in dem fehlenden Besuch, sondern daß DESCARTES expressis verbis mit GALILEIs Methoden nicht einverstanden war. So schrieb er 1638 an MERSENNE (GUSDORF 1969,Bd. I, S. 96-97): *Im allgemeinen finde ich, daß er* (GALILEI) *viel besser philosophiert als das gemeine Volk, weil er so weit wie möglich die schulmäßigen Fehler vermeidet und sich bemüht, die physikalische Materie mit mathematischen Überlegungen zu untersuchen. Darin stimme ich voll mit ihm überein, und ich bleibe dabei, daß es absolut kein anderes Mittel gibt, die Wahrheit zu finden. Aber es scheint mir, daß ihm viel dadurch fehlt, daß er kontinuierlich abschweift und nicht dabei verweilt, eine Materie voll und ganz zu erklären, was zeigt, daß er sie nicht gemäß der Ordnung untersucht hat, und daß er, ohne die ersten Gründe der Natur in Betracht gezogen zu haben, Erklärungen für irgendwelche speziellen Effekte gesucht hat, und daß er so ohne Fundament gebaut hat. Da seine Philosophie nun aber der Wahrheit näherkommt, kann man ebenfalls leichter ihre Fehler kennen, ebenso wie man leichter sagen kann, wann jemand, der den wahren Weg geht, sich verirrt, als wann jene sich verirren, die ihn nie gefunden haben.*
Für Georges GUSDORF ist dieser Brief d a s Indiz dafür, daß DESCARTES kein moderner Wissenschaftler war, sondern der Scholastik und dem Aristotelismus näherstand (S. 345):

Nach einer Aufzählung von 27 physikalischen und erkenntnistheoretischen Fehlern DESCARTES' fährt VOLTAIRE fort: *Man*

Dieser Prozeß des Galilei fällt viel mehr über Descartes ein Urteil als über Galilei; denn gefährlich sind die Verirrungen Descartes' selbst. Es gebührt dem italienischen Wissenschaftler zur Ehre, nichts für wahr gehalten zu haben außerhalb dessen, was er wußte. Galilei hat die Voraussetzungen der modernen Wissenschaft formuliert; seine Theorien, auf dem Niveau induktiver Forschungen, suchen die Erklärung von Fakten, von bestimmten Kategorien von Fakten. Descartes verachtet die lange Geduld der experimentellen Forschung; von Null ausgehend gibt er vor, auf einen Schlag alles fertigzustellen, was er begonnen hat, ohne um Bestätigung von Seiten der Realität der Dinge nachzusuchen, so sehr ist er davon überzeugt, daß die Fakten den Imperativen des Systems folgen werden. Daraus ergibt sich, daß, wenn Galilei sich in einem bestimmten Problem irrt, sein Irrtum nur ein spezieller ist, der nicht die Gesamtheit seiner wissenschaftlichen Haltung angreift. Im Gegensatz dazu ist der Irrtum Descartes' ein totaler Irrtum. Die Fundamente, auf die er angeblich seine Physik baut, sind wertlos, weil voreilig gelegt; schon da stürzte das gesamte Werk zusammen.

Und an anderer Stelle (GUSDORF 1969, Bd. I, S. 96-97): *Eine Generation jünger als Galilei, scheint Descartes ihm gegenüber ein ganzes geistiges Zeitalter älter. Wenn er auch die Wichtigkeit der physikalisch-mathematischen Verbindung genau erkennt, die von seinem Vorgänger etabliert wurde, so erkennt Descartes demgegenüber nicht, daß die moderne Wissenschaft die Entflechtung von Physik und Metaphysik voraussetzt. Der zukünftige Autor der "Principes de la Philosophie" verlangt vom Physiker die Bestimmung der "ersten Gründe der Natur", die die Galileische Reform aus dem epistemologischen Feld verbannt hat; die Cartesische Physik ist verdorben durch einen dauerhaften Aristotelismus; sie verlängert eher die Vergangenheit als daß sie die Zukunft vorbereitet. Es ist nicht richtig, zu sagen, daß Galilei "ohne Fundamente" gebaut hat; ganz im Gegenteil hat er die Fundamente der kommenden Wissenschaft gelegt, die Descartes, trotz seines philosophischen Scharfsinns und seines mathematischen Genies niemals vorhergeahnt hat.*

muß einräumen, daß es in der Physik Descartes' nicht eine einzige Neuheit gegeben hat, die nicht ein Irrtum war. Nicht etwa, daß er kein Genie besaß; im Gegenteil, gerade weil er nur dieses Genie zu Rate zog, ohne die Erfahrung und die Mathematik zu Rate zu ziehen: Er war einer der größten Geometer Europas, aber er verließ seine Geometrie, um nur noch seiner Vorstellung zu glauben. So ersetzte er das Chaos des Aristoteles nur durch ein weiteres Chaos. Dadurch hemmte er den Fortschritt des menschlichen Geistes um mehr als fünfzig Jahre.

Wesentlich gemäßigtere Töne schlägt D'ALEMBERT im "Discours prêliminaire" der "Encyclopédie" an (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751, S. XXV): *Dieser außerordentliche Mensch, dessen Schicksal sich in weniger als einem Jahrhundert so verändert hat, besaß alles, was nötig war, um das Antlitz der Philosophie zu verändern; eine starke Vorstellungskraft, einen sehr konsequenten Geist, Kenntnisse mehr aus sich selbst heraus als aus den Büchern, viel Mut, um die allgemein überlieferten Vorurteile zu bekämpfen ...*

Nach einer langen Würdigung des Verdienstes von DESCARTES als Mathematiker schreibt D'ALEMBERT sehr zurückhaltend weiter: *Als Philosoph war er vielleicht ebenfalls groß, aber er hatte kein großes Glück. Die Geometrie, die durch die Natur ihres Gegenstandsbereichs immer gewinnen muß, ohne zu verlieren, erfuhr, bearbeitet von einem derart großen Genie, sehr spürbare Fortschritte, für jedermann offensichtlich. Die Philosophie befand sich in einem völlig anderen Zustand, dort war alles noch am Anfang: Und wie viel kosten nicht die ersten Schritte in jedem Bereich? Der Verdienst, sie zu machen, entbindet denjenigen davon, auch große zu machen.*

In den einzelnen Artikeln der "Encyclopédie" werden DESCARTES' Fehler deutlicher herausgestellt als im Vorwort, ohne deswegen allerdings ein nur negatives Urteil über DESCARTES zu fällen. Die Artikel, die ihn betreffen, sind sehr ausgewogen und nennen sowohl seine Verdienste als

auch seine Fehler. So heißt es etwa im Artikel "Expérimental": *Descartes ... öffnete einige Wege in der experimentellen Physik, aber empfahl sie mehr als sie zu praktizieren; und das hat ihn vielleicht zu mehreren Irrtümern verleitet. Er hatte beispielsweise den Mut, die ersten Bewegungsgesetze aufzustellen; ein Mut, der die Anerkennung der Philosophen verdient, da er jene, die ihm gefolgt sind, auf den Weg der wahren Gesetze geführt hat; aber die Erfahrung, oder vielmehr, wie wir weiter unten sagen werden, Reflexionen über die allgemeinsten Beobachtungen, hätten ihn gelehrt, daß die von ihm aufgestellten Gesetze unhaltbar waren. Trotz aller Verpflichtungen, die die Philosophie ihnen gegenüber hat, hätten Descartes und selbst Bacon ihr mehr genützt, wenn sie mehr Physiker der Praxis als der Theorie gewesen wären; ...*

Und im Artikel "Application" heißt es unter anderem: *In der "Géométrie" von Herrn Descartes findet man zum ersten Mal die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, ebenso exzellente Methoden, um die Algebra selbst zu perfektionieren: Dadurch hat dieses große Genie der Mathematik einen unsterblichen Dienst erwiesen, und den Schlüssel geliefert für die größten Entdeckungen, die man in dieser Wissenschaft erhoffen konnte.*

Und immer wieder gibt es Artikel - wie etwa "Astronomie" -, in denen es am Anfang heißt: *Descartes war der erste, der versucht hat, diese unterschiedlichen Dinge mit einiger Wahrscheinlichkeit zu erklären ...*

Das Zeitalter der Aufklärung respektierte DESCARTES als den Begründer der mathematischen Analysis und als denjenigen, der versucht hat, als erster Licht in das damalige Dunkel der scholastischen "Wissenschaft" zu bringen, kritisierte aber auf der anderen Seite um so deutlicher seine Abneigung gegen sinnliche Erfahrungen, gegen Experimente und konkrete Beobachtungen, die ontologischen Widersprüche seiner aprioristischen Physik und das teilweise Nichtbeachten seiner eigenen Regeln und Methoden, insbesondere auf physikalischem Gebiet.

Nach alledem nimmt es eigentlich wunder, daß DESCARTES' Physik sich überhaupt durchgesetzt hat und einen so nachhaltigen Einfluß auf das 18. Jahrhundert ausgeübt hat. WADE begründet den ungewöhnlichen Erfolg von DESCARTES' Physik so (WADE 1971, S. 239-240): *One of its outstanding features is that it is so carefully thought out; another is its presentation, which has all the simplicity and clarity of a geometrical proposition or perhaps a whole set of geometrical propositions. Its metaphysical insights are surpassed only by its idealism and its practical value. Never did a philosophy present itself under such auspicious circumstances, promise so much to mankind, or possess such inner integrity and balance as Cartesianism. After all this has been said, though, it has to be recorded that never has a philosophy proved so completely descriptive, in reconstituting the physical world.*

4.4 Antoine ARNAULD

Die Kritik an EUKLID erfuhr im 17. Jahrhundert durch Antoine ARNAULD einen neuen Aufschwung. In seiner "Logique, ou l'Art de penser" aus dem Jahr 1662, auch als "Logique de Port-Royal" bekannt, kritisierte er EUKLID und seine Methode heftig. Im vierten Teil, Kapitel IX (*De quelques défauts qui se rencontrent d'ordinaire dans la méthode des géomètres*), sind die sechs wesentlichen Fehler aufgezählt (ARNAULD 1854, S. 299-303): *1. Fehler. Auf Sicherheit wird mehr Wert gelegt als auf Klarheit, ebenso wie mehr darauf geachtet wird, den Geist zu überzeugen, als ihn aufzuklären.*
Die Geometer wollten lobenswerterweise nur Überzeugendes verbreiten; aber es scheint, daß sie zu wenig darauf geachtet haben, daß es, um eine perfekte Kenntnis über irgendeine Wahrheit zu erhalten, nicht ausreicht, von ihrer Richtigkeit überzeugt zu sein, wenn man ferner, aus Gründen, die in der Natur der Sache selbst liegen, nicht er-

kennt, warum sie wahr ist; denn bis wir an jenem Punkt angelangt sind, ist unser Geist nicht vollständig zufrieden, und sucht eine noch größere Kenntnis als die, die er besitzt: Dies ist ein Zeichen dafür, daß er das wahre Wissen noch nicht erlangt hat. Man kann sagen, daß dieser Fehler der Ursprung für alle anderen ist, die wir bemerken, und daher ist es nicht nötig, ihn weiter zu erklären, weil dies im folgenden genügend geschehen wird.

2. Fehler. Es werden Dinge bewiesen, die keines Beweises bedürfen.

Die Geometer geben zu, daß man sich nicht damit aufhalten darf, zu beweisen, was aus sich selbst heraus klar ist. Sie tun es trotzdem oft, da sie, wie bereits erwähnt, in dem Bestreben, den Geist eher zu überzeugen als ihn aufzuklären, glauben, daß dies besser gelingt, wenn sie Beweise selbst für die augenscheinlichsten Dinge suchen, anstatt diese einfach vorzubringen und dem Geist zu überlassen, die Klarheit darin zu erkennen.

Das ist es, was Euklid veranlaßte, zu beweisen, daß zwei Seiten eines Dreiecks zusammen größer sind als eine, obwohl dies allein schon durch den Begriff der Geraden klar ist, die ja die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten und das natürliche Maß des Abstands von einem Punkt zum anderen ist, was sie nicht wäre, wenn sie nicht auch die kürzeste aller Linien wäre, die zwischen zwei Punkten gezogen werden können.

3. Fehler. Beweisführung durch Widerspruch.

Diese Arten der Beweisführung, die zeigen, daß eine Sache nicht durch ihre Prinzipien so und so beschaffen ist, sondern durch irgendeine Widersinnigkeit, die sich ergäbe, wenn sie anders wäre, sind bei Euklid sehr üblich. Es ist doch sichtbar, daß sie den Geist überzeugen können, ihn aber in keinster Weise aufklären; was der Hauptertrag der Wissenschaft sein muß: da unser Geist ganz und gar nicht zufrieden ist, wenn er nur weiß, daß die Sache ist, und nicht, warum sie ist: Das lernt man nicht anhand eines Beweises durch Widerspruch.

4. Fehler. Beweise, bei denen zu weit ausgeholt wird. Bei Euklid findet man überall diese zu weit hergeholten Beweisführungen.

5. Fehler. Die wahre Ordnung der Natur wird nicht beachtet. Dies ist der größte Fehler der Geometer. Sie haben sich eingebildet, es gäbe keine einzuhaltende Ordnung außer der, daß die ersten Behauptungen als Beweis für die folgenden dienen können; und ohne sich um die Regeln der wahren Methode zu kümmern, die darin besteht, bei den einfachsten und allgemeinsten Dingen zu beginnen, um dann zu den komplizierteren und spezielleren überzugehen, mischen sie alle Dinge, behandeln Linien und Flächen, Dreiecke und Vierecke durcheinander, beweisen anhand von Figuren die Eigentümlichkeiten einfacher Linien und machen eine Unzahl anderer Umkehrungen, die diese schöne Wissenschaft entstellen. Überall in den Elementen des Euklid findet man diesen Fehler.

6. Fehler. Es werden keine Aufteilungen und Zerlegungen benutzt.

In der Beschreibung dieser Fehler treten deutlich die allen französischen EUKLIDkritikern gemeinsamen Hauptkritikpunkte hervor, daß nämlich in der herkömmlichen Geometrie Dinge bewiesen werden, die keines Beweises bedürfen, daß die Beweise zwar "beweisen", aber nichts erklären, und schließlich und hauptsächlich, daß die natürliche Ordnung der Ideen und Begriffe nicht beachtet wird. Auf die letzten beiden Punkte weist NICOLE im Vorwort zu ARNAULDs "Nouveaux Elémens de Géométrie" (auch bekannt unter dem Titel "Géométrie de Port-Royal") nachdrücklich hin (ARNAULD 1667; das Vorwort ist nicht paginiert): *Denn den geometrischen Wahrheiten ist es zu eigen, von einer langen Kette von Prinzipien abhängig zu sein, der man folgen muß, um zum Schluß zu gelangen; und da diese Schlußfolgerung aus diesen Prinzipien hervorgeht, muß der Geist gleichzeitig sehen, was aufklärt und was aufgeklärt wird, was er nicht kann, ohne sich zu erweitern, ohne seinen Blick*

über die gewöhnliche Tätigkeit zu erheben.
Seine (ARNAULDs) *Überzeugung, daß es vorteilhaft wäre, sich anzugewöhnen, seine Gedanken in eine natürliche Ordnung zu bringen, welche die einen Gedanken durch die anderen wie ein Licht erhellte, ließ ihn glauben, daß es nützlich wäre, dieser Wissenschaft eine neue Form zu geben; denn die konfusen und wirren Elemente des Euklid bereiteten ihm einige Schwierigkeiten, da sie weit davon entfernt waren, dem Geist die Idee und den Sinn für die natürliche Ordnung geben zu können, sondern ihn im Gegenteil nur an die Unordnung und das Durcheinander gewöhnen können.*

Unmittelbar vorher weist NICOLE auf einen neuen Aspekt der "Géométrie de Port-Royal" hin, auf die Verbindung der Geometrie mit den "choses extérieures", der auch für CLAIRAUT bei der Darstellung seiner "Eléments de géométrie" große Bedeutung hatte: *Aber da für ihn die Liebe zu sinnlich wahrnehmbaren und äußerlichen Dingen natürlich geworden war, sowohl durch seine Herkunft als auch durch die Gewohnheit, die diese während der Kindheit bewirkte, sind die äußerlichen Dinge immer Hauptgegenstand seines Vergnügens und seiner Neigung.*
So gefallen nicht nur den jungen Leuten wahrnehmbare Dinge; sondern selbst unter den Personen fortgeschrittenen Alters befinden sich wenige, die imstande wären, an einer rein geistigen Wahrheit Gefallen zu finden, an der die Sinne keinen Anteil hätten.

4.5 Von DESCARTES zu NEWTON

Obwohl die Cartesische Physik noch weit bis ins 18. Jahrhundert hinein in Frankreich ihre Gültigkeit behielt, hatte Isaac NEWTON bereits 1687 in seinem Hauptwerk "Principia mathematica philosophiae naturalis" ein völlig neues physikalisches Weltbild geschaffen und damit auch die Methodologie der damaligen Wissenschaft sehr verändert. Dieses

Werk NEWTONs war es, das nicht nur wegen seiner wissenschaftlichen Aussage, sondern insbesondere wegen eben dieser neuen methodologischen Sichtweise nicht nur die Wissenschaftler des 18. Jahrhunderts, sondern alle führenden Denker der Aufklärung, insbesondere auch VOLTAIRE, beeinflußt hat.

Isaac NEWTON wurde im Jahr 1643 in Woolsthorpe geboren und starb im Jahr 1727 in Kensington. Er war Schüler und ab 1669 Nachfolger I. BARROWs als Professor der Mathematik in Cambridge. Sein eben erwähntes Hauptwerk "Principia mathematica philosophiae naturalis" erschien im Jahr 1687 in lateinischer Sprache in einer Auflage von 250 Exemplaren, danach im Jahr 1713, ebenfalls in lateinischer Sprache, in einer Auflage von 750 Exemplaren[1].

Zwar wurde NEWTON bereits 1699 zum Mitglied der "Académie des Sciences" gewählt, aber nicht etwa wegen seiner Verdienste um die Physik (COHEN 1958, S. 428): *One sometimes reads that Newton was the first foreigner elected to the "Académie des Sciences" upon its reorganization in 1699, and the inference is that by this gesture the French were magnanimously recognizing the magnitude of his challenge to Descartes. Neither the fact nor the implication is correct. When the Academy began operating under its new charter, it already included three foreign members, Leibniz, Tschirnhaus, and Guglielmini, and it filled the five additional vacancies authorized in the following order: Hartsoeker, the brothers Bernoulli, Roemer and Newton. Nor, although "Naturalis Philosophiae Principia Mathematica" had been in print since 1687, was the Academy yet aware that this book posed a fundamental challenge to the science known to its members, or that they were bringing into their company the founder of classical physical science, in the*

---

[1] Vielleicht war diese geringe Verbreitung einer der Gründe, daß die "Académie des Sciences" in Paris so lange an DESCARTES' Physik festhielt, obwohl - wie in Kapitel 3 bereits erwähnt - CLAIRAUT ein Exemplar von 1687 besaß.

consciousness of which the world was to live ever after. In choosing Newton eighth on the list, the Academy thought itself to be electing simply a mathematician of extraordinary geometrical skill, and the author of important experiments (and a very questionable theory) bearing on the nature of light.

Der Wandel, den Isaac NEWTON mit seinen "Principia mathematica philosophiae naturalis" einleitete, tritt am klarsten zutage im Vorwort der Ausgabe von 1713, das von Roger COTES verfaßt wurde[1]. Er beschreibt die Entwicklung der Physik und auch der Methodologie ausgehend von der Scholastik über DESCARTES bis hin zu NEWTON (NEWTON 1759, S. xxi-xxij, xxxj): *Alle Autoren, die die Physik behandelt haben, lassen sich in drei Klassen einteilen. Zunächst sah man Philosophen, die jeder besonderen Art von Körpern okkulte und nur ihnen eigene Qualitäten zugeordnet haben, aus denen sie hernach - auf noch okkultere Weise - die Phänomene folgerten, die wir alle kennen. Das ist das Fundament der Schule, die von Aristoteles und den Peripatetikern gelehrt wurde. Ihnen zufolge hängt jede spezielle Auswirkung absolut von einer gewissen Natur ab, die jedem der Körper eigen ist, und die deren Ursache oder Grund ist; aber sie bewahren absolutes Stillschweigen über den Grund und das Prinzip dieser Natur. Da sie die Dinge also weggelassen haben, um sich nur noch mit Worten zu beschäftigen, kann man sie nur mehr oder weniger als Erfinder einer Art philosophischer Sprechweise betrachten, und nicht als Autoren einer wahrhaften Philosophie.*
Andere haben sich vorgenommen, sinnlose Worte zu verbannen, und sich selbst damit geschmeichelt, einen solideren Ruhm zu erwerben durch wirklichkeitsnähere Arbeiten. Sie stellten daher das Prinzip auf, daß alle Materie im allgemeinen gleicher Natur oder homogen ist; und daß die Verschieden-

---

[1] Diese Ausgabe von 1713 diente als Grundlage der französischen Übersetzung durch Madame DU CHÂTELET; das obige Zitat ist eine Übersetzung der französischen Übersetzung.

heit, die man in jedem Körper insbesondere durch seine äußere Konfiguration bemerkt, nur abhängt von einigen Einwirkungen in sich, die sehr einfach und leicht zu begreifen sind.

Nichts besser also als vom Einfachsten zum Zusammengesetztesten vorzuschreiten; vorausgesetzt gleichwohl, daß man diesen primitiven und ursprünglichen Eigenschaften keine anderen Formen oder andere Grenzen gibt als jene, die die Natur selbst vorgeschrieben hat. Aber bald schon bewunderten diese Philosophen nach ihrem Gutdünken solche Größen und solche Figuren, deren Betrachtung sie für ratsam hielten; stellten sich nach Bedarf Bewegungen und wechselseitige Positionen in den Teilen vor, die diese Körper zusammensetzten: Schließlich erdachten sie unsichtbare Flüssigkeiten, von einer wunderbaren Dünnheit, angetrieben von geheimen Bewegungen, in der Lage, die Poren aller Körper zu durchdringen, als würde die Materie keinerlei Widerstand entgegensetzen; und dadurch verfielen sie in Träumereien, die ebenso lächerlich waren wie die der Alten, indem sie es unterließen, sich zu unterrichten und die wirkliche Anordnung der Natur zu untersuchen; ein Wissen, das man sicherlich nicht in trügerischen Vermutungen suchen darf, da selbst die unbestreitbarsten Beobachtungen noch Mühe haben, es uns zu vermitteln.

Kommen wir zur dritten Klasse, zu jenen, die in ihrer Philosophie keine andere Regel anerkennen als die Erfahrung. Diese letzteren, die davon überzeugt sind, daß man so weit wie möglich die Auswirkungen aus den einfachsten Gründen folgern muß, lassen jedoch kein Prinzip zu, das nicht durch konstante Beobachtungen bewiesen ist. Sie stellen keine Hypothesen auf und akzeptieren auch keine in der Physik, außer um sie der Prüfung zu unterziehen und ihre Wahrheit oder Falschheit durch eine exakte und strenge Diskussion zu erkennen. Sie gebrauchen bei dieser Untersuchung die beiden jedermann bekannten Methoden, die Analyse und die Synthese. Mit Hilfe der ersten leiten sie aus einigen geschickt gewählten Phänomenen die Kräfte der Natur ab und die einfachsten Gesetze, die aus diesen selben

Kräften folgen; hernach stellen sie in synthetischer Weise die Ordnung und die Einteilung der anderen dar, die unmittelbar von diesen ersten abhängen. Das ist zweifellos die beste Philosophie, und es ist auch diejenige, die unser berühmter Autor gewählt hat, und von der er geglaubt hat, daß sie allen anderen vorzuziehen sei.

Der Vergleich zwischen NEWTON und DESCARTES und ihren wissenschaftlichen Leistungen geht im 18. Jahrhundert - bis auf wenige Ausnahmen - immer zugunsten NEWTONs aus. Es wurde zwar oft betont - insbesondere von den treuen Anhängern des Cartesianismus in Frankreich -, daß NEWTON sich an den mathematischen und physikalischen Werken DESCARTES' herangebildet hätte[1], auf der anderen Seite war NEWTONs Abneigung gegen DESCARTES so groß, daß er nicht nur in seinen "Principia mathematica philosophiae naturalis" DESCARTES' Physik bekämpfte (COHEN 1958, S. 12): *We know that Newton's antagonism to Descartes was extreme, that he not only made a pointed attack on Cartesian physics again and again in the "Principia", but in his own copy of Descartes' geometry "marked in many places with his own hand, 'Error, Error, non est Geom.'". So strong was this feeling on the part of Newton that we are led to suspect that the title of his masterpiece, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", was intended to show its superiority over Descartes' "Principia Philosophiae", of which a copy of the edition of 1656 in quarto was in his library.*

(Zitiert nach: Sir David Brewster, Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton, Edinburgh, 1875.)

NEWTON hatte bei der Lektüre der Werke DESCARTES' schnell gemerkt, daß es zwei hauptsächliche Schwächen darin gab:

---

[1] NEWTON schrieb 1676 sehr bildhaft an HOOKE: *Wenn ich weiter gesehen habe, dann deswegen, weil ich auf den Schultern von Riesen stand*, wobei er insbesondere GALILEI, KEPLER und wohl auch DESCARTES meinte (CASINI 1969, S. 149).

zum einen führte die a-priori-Methode DESCARTES' bei weitem nicht zu so guten Ergebnissen, wie seine experimentelle Methode, da die a-priori-Methode zu Schlüssen führte, die nicht mehr mit der Wirklichkeit übereinstimmten; zum anderen erschien NEWTON DESCARTES' Ungeduld mit Einzelheiten und sein Vertrauen in die Intuition als äußerst fragwürdig. WADE beschreibt ihren Abstand (1971, S. 533-534):

Indeed, to realize just how far apart the two are, one need only recall that the initial Newtonian intuition was derived from the suspicion that there ought to exist some sort of relationship between Kepler's laws and Galileo's laws. Descartes never entertained any such suspicion: even if he had, he would never have proceeded to verify it by Newton's painstaking analysis. Descartes' difficulty, indeed, arose from the disaccord between his hypotheses and the known facts. Never did his explanation of the universe agree with all of Kepler's laws.
Newton's great advantage over his predecessor was thus obtained by beginning with Kepler's and Galileo's laws. His results were achieved by methods which Descartes would have scorned: methodical observation and constant measurement of the phenomena, never attempting to explain its workings by intuition, never resorting to hypotheses, a constant refusal to draw ultimate conclusions. Newton abided by his determination never to go beyond the observed fact and the exact measurement. What he gave as principles were only simple declaratory definitions geometrically arranged. What he presented as conclusions in his system of the universe were still descriptions of observed facts, exact measurement, mathematical laws, followed by corollaries: simplicity of nature which is always consonant with itself, identity of causes of analogous facts, existence of common properties observable in all bodies.

Diese "Identität der Gründe" war ein weiterer Hauptpunkt, der NEWTON und DESCARTES in methodologischer Hinsicht trennte. Suchte NEWTON zumindest für gleiche Phänomene gleiche Gründe, so hatte DESCARTES noch Wert darauf gelegt,

daß gleiche Phänomene ganz verschiedene Ursachen haben können. So schreibt DESCARTES am Ende seiner "Principia philosophiae" (GUSDORF 1969, Bd. I, S. 348): *Dem könnte man vielleicht entgegnen, daß, obwohl ich vielleicht Gründe ersonnen habe, die ähnliche Effekte erzeugen wie die, die wir sehen, wir daraus nicht schließen dürfen, daß die Effekte, die wir sehen, auch wirklich von diesen Gründen erzeugt sind: Denn so, wie ein industrieller Uhrmacher zwei Uhren herstellen kann, die die Zeit auf gleiche Weise angeben, und zwischen denen es äußerlich keinerlei Unterschied gibt, die aber in der Zusammenstellung ihrer Räder keinerlei Übereinstimmung zeigen, so ist es sicher, daß Gott eine Unendlichkeit verschiedener Möglichkeiten hat, mit Hilfe deren jeder er bewirkt haben kann, daß alle Dinge dieser Welt so erscheinen, wie sie eben erscheinen, ohne daß es möglich ist für den menschlichen Geist zu wissen, welche dieser Möglichkeiten er gebrauchen wollte; dem zuzustimmen bereitet mir keinerlei Schwierigkeiten. Und ich würde glauben, genug getan zu haben, wenn die Dinge, die ich erklärt habe, derart sind, daß alle ihre Auswirkungen denen, die wir in der Welt sehen, ähnlich sind, ohne mich zu überzeugen, ob sie eben durch diese oder durch andere erzeugt worden sind. Ich glaube sogar, daß es für das Leben ebenfalls nützlich ist, derart ersonnene Gründe zu kennen, als wenn man die wahren Gründe kennen würde ...*

Dem und den okkulten Qualitäten der Scholastiker hält NEWTON im Anhang seiner "Optik" gegenüber (STEINMANN 1913, S. 7-8): *Behaupten, daß die einzelnen Arten der Dinge mit spezifischen Qualitäten ausgerüstet sind, durch welche sie eine bestimmte Kraft im Wirken hätten und bestimmte offenbare Wirkungen hervorbrächten, das heißt allerdings nichts sagen. Aber aus den Phänomenen der Natur zwei oder drei allgemeine Grundsätze der Bewegung ableiten und dann erklären, wie die Eigentümlichkeiten und Handlungen aller körperlichen Dinge aus diesen offenbaren Prinzipien erfolgen, damit wäre ein großer Fortschritt in der Philosophie gemacht, auch wenn die Ursachen dieser Grundsätze noch*

nicht erkannt wären. Diese Prinzipien betrachte ich nicht als okkulte Qualitäten ..., sondern als universale Gesetze der Natur, durch welche die Dinge selbst gebildet worden sind.

Auch begeht NEWTON nicht den Fehler - wie etwa noch DESCARTES -, nach den "ersten und wahren Gründen" der Physik zu fragen. Er betont deutlich, daß für ihn beispielsweise die "Gravitation" nicht eine neue okkulte Qualität der Körper oder ein neues grundlegendes Prinzip der Physik ist (GUSDORF 1969, Bd. I, S. 360): *Ich betrachte im selben Sinn die Anziehungskräfte und die beschleunigenden Antriebskräfte ..., und ich bediene mich unterschiedslos der Worte "Anziehungskraft", "Impuls" und "Zustreben auf ein Zentrum", denn ich betrachte diese Kräfte mathematisch und nicht physikalisch. So muß sich der Leser wohl davor hüten zu glauben, ich hätte mit diesen Worten irgendeine Art von Aktion bezeichnen wollen, von Gründen oder physikalischen Erklärungen, und wenn ich sage, daß die Zentren anziehen, wenn ich von ihren Kräften spreche, so darf man nicht glauben, daß ich diesen Zentren irgendeine reelle Kraft verleihen wollte, denn ich betrachte diese Zentren als mathematische Punkte.* (Zitiert nach (NEWTON 1759).)

Diese Theorienhaftigkeit der Gravitation ist für STEINMANN einer der Hauptunterschiede zwischen NEWTON und allen anderen Physikern (STEINMANN 1913, S. 12): *Hier haben wir nun den entscheidenden Unterschied zwischen Newton und seinen Vorgängern. Während die Korpuskulartheorie unter Erklärung eines Vorganges seine Zurückführung auf Druck und Stoß seiner Teilchen verstand und dabei diese Erscheinungen als etwas ganz selbstverständliches, keiner Erklärung weiter bedürftiges annahm, macht Newton ihr gegenüber einen prinzipiellen Fortschritt. Er verzichtet völlig auf solche anschaulichen, aber im Grunde das Problem nur zurückschiebenden Erklärungsversuche ...*

Ebenfalls als Ablehnung DESCARTESscher Methoden ist NEWTONs berühmter Ausspruch "Hypotheses non fingo" zu

verstehen. Er schreibt in einem Brief an Roger COTES aus dem Jahr 1713 (in dem die zweite Auflage von NEWTONs "Principia mathematica philosophiae naturalis" gedruckt wurde, deren Vorwort, wie bereits zitiert, von COTES verfaßt wurde) (GUSDORF 1969, Bd. I, S. 359): *Alles, was nicht aus Phänomenen abgeleitet ist, muß Hypothese genannt werden, und die Hypothesen von der Art, daß sie metaphysischer oder physikalischer Natur sind, und die okkulte oder mechanische Qualitäten erzeugen, haben keinen Platz in der experimentellen Philosophie. In dieser Philosophie werden die Lehrsätze aus den Phänomenen abgeleitet und hernach durch Induktion verallgemeinert.*

Mit einigen Bemerkungen zum Wesen der Mathematik in NEWTONs "Principia" schließt sich der Kreis zu CLAIRAUT und dessen problemorientierter Mathematik (STEINMANN 1913, S. 17; Zitate aus NEWTONs "Principia"): *"In der Mathematik hat man die Größe der Kräfte und diejenigen Verhältnisse zu erforschen, welche aus beliebigen gesetzlichen Bedingungen erfolgen werden; dann, wenn man zur Physik herabsteigt, müssen diese Verhältnisse mit den Erscheinungen verglichen werden, um zu erkennen, welche Bedingungen von Kräften den einzelnen Arten der anziehenden Körper zukommen." Dabei fällt auf, wie weit er die Aufgabe der Mathematik nimmt; sie umfaßt den ganzen rein theoretischen Teil der Mechanik und ist also durchaus angewandte Mathematik; Newton hält überhaupt nicht viel von reiner Mathematik; die Geometrie, die ihm wie Descartes das Wichtigste ist, ist eigentlich nur eine besondere Disziplin der Mechanik: "Es gründet sich also die Geometrie in der mechanischen Praxis und ist nichts weiter als der Teil der allgemeinen Mechanik, welche die Kunst zu messen genau auseinandersetzt und beweist."*

Und an anderer Stelle heißt es bei STEINMANN (1913, S. 38): *Mit Newton stimmt Locke auch in dem weiten Gebrauch des Wortes Axiom überein, sowie darin, daß er von einer rein axiomatischen Begründung der Mathematik nichts wissen will. Anschauung ist ihm letztes und sicherstes mathematisches*

Erkenntnismittel; aller Beweis muß sich zuletzt auf intuitive Erkenntnis stützen.

Als NEWTON im Jahr 1727 starb, erschien in der "Histoire de l'Académie Royale des Sciences" eine eingehende Würdigung seiner Persönlichkeit und seines Werks. Die zwanzigseitige Abhandlung wurde von FONTENELLE, dem damaligen "Secrétaire perpétuel" der Akademie, einem der intensivsten Bewahrer der Cartesianischen Philosophie, verfaßt. Aber bereits in dieser Nachrede auf NEWTON - zu einer Zeit, da der Kampf für das NEWTONsche Weltbild in Frankreich kaum begonnen hatte - spürt man, wie die Stimmung sich langsam zugunsten NEWTONs bessert (HARS 1727, S. 151-172): *Die beiden großen Männer, die sich in einer so großen Opposition finden, hatten große Übereinstimmungen. Beide waren Genies erster Ordnung, geboren, um über die anderen Geister zu herrschen, und um geistige Reiche zu gründen. Beide haben als exzellente Geometer die Notwendigkeit erkannt, die Geometrie auf die Physik anzuwenden. Beide haben ihre Physik auf eine Geometrie gegründet, die sie fast nur ihrer eigenen Erleuchtung verdankten. Aber der eine wollte mit einem beherzten Schwung sich an der Quelle von allem plazieren und durch einige klare und fundamentale Ideen Meister der ersten Prinzipien werden, um nichts weiter zu tun zu haben als zu den Phänomenen der Natur herabzusteigen, wie zu notwendigen Konsequenzen; der andere, furchtsamer, oder gemäßigter, begann seinen Marsch gestützt auf die Phänomene, um zu den unbekannten Prinzipien aufzusteigen ... Der eine geht davon aus, was er deutlich begreift, um den Grund dessen zu finden, was er sieht. Der andere geht von dem aus, was er sieht, um dessen Grund zu finden, sei er klar oder dunkel. Die offensichtlichen Prinzipien des einen führen ihn nicht immer zu den Phänomenen, so wie sie sind; die Phänomene führen den anderen nicht immer zu genügend offensichtlichen Prinzipien. Die Grenzen, die auf diesen einander entgegengesetzten Wegen zwei Männer dieser Art aufhalten konnten, sind nicht die Grenzen ihres Geistes, sondern die Grenzen*

des menschlichen Geistes.

Und zur Anziehungskraft heißt es an anderer Stelle: NEWTON *erklärt deutlich, daß er diese Anziehungskraft nur als einen Grund ansieht, den er absolut nicht kennt, und von dem er nur die Auswirkungen betrachtet, vergleicht und berechnet, und um sich gegen den Vorwurf zu wehren, das erinnere an die okkulten Qualitäten der Scholastiker, sagt er, daß er nur handgreifliche, durch die Phänomene spürbare Qualitäten etabliert, daß aber in Wahrheit die Gründe dieser Qualitäten okkult sind, und daß er ihre Untersuchung anderen Philosophen überläßt. Aber was die Scholastiker okkulte Qualitäten nannten, waren das nicht Gründe? Auch sie sahen die Auswirkungen. Außerdem, glaubt Herr Newton, daß andere diese okkulten Gründe, die er nicht gefunden hat, finden werden.*

Und selbst VOLTAIRE, der später mit DESCARTES scharf ins Gericht ging, drückt sich - zumindest noch im Jahr 1728 - beim Vergleich von DESCARTES mit NEWTON noch ziemlich zurückhaltend aus (VOLTAIRE 1879, S. 131): *Die Geometrie war ein Führer, die er selbst in gewisser Weise geformt hatte, und die ihn sicher in seiner Physik geleitet haben könnte; zum Schluß verbannt er jedoch diesen Führer und liefert sich dem Systemgeist aus. Daher war seine Philosophie nur ein geschickt erdachter Roman, im besten Fall wahrscheinlich für die unwissenden Philosophen seiner Zeit ...*
Ich glaube nicht, daß man es wirklich wagen kann, seine Philosophie mit der von Newton zu vergleichen: Erstere ist ein Versuch, die zweite ist ein Chef-d'Oeuvre; aber derjenige, der uns auf den Weg der Wahrheit gebracht hat, wiegt vielleicht ebenso viel wie derjenige, der seither sein Ende erreicht hat.

Vom methodologischen Standpunkt aus betrachtet ist der von NEWTON beschrittene Weg also nicht - wie der Cartesische - der der Deduktion, ausgehend von allgemeinsten eingeborenen Prinzipien oder "Hypothesen", sondern für ihn

sind die Erfahrung und die Beobachtung die einzigen Ausgangspunkte für eine authentische Naturwissenschaft. Die Richtung des logischen Schließens ist also nicht - wie bei DESCARTES - von den Prinzipien zu den Einzelphänomenen, sondern von den Tatsachen zu den Ideen dieser Phänomene: Gegenüber der DESCARTESschen Deduktion bevorzugt NEWTON die analytische Methode, die für das wissenschaftliche Frankreich des 18. Jahrhunderts zu d e r wissenschaftlichen Methode schlechthin wurde.

Mit dieser Änderung der Methodologie der Naturwissenschaften gegen Ende des 17. Jahrhunderts ging einher eine Änderung des Wahrheitsbegriffs und damit auch eine Änderung der Suche nach der Wahrheit. Für die Scholastik war die Wahrheit noch etwas von Gott absolut Gegebenes, an dem es keinerlei menschliche Zweifel geben konnte. Und auch DESCARTES berief sich bei seinen eingeborenen Ideen, mit deren Hilfe die Menschen in der Lage sein sollten, die Wahrheit zu schauen, letzten Endes auf Gott als höchsten Schöpfer, der die Menschen mit den eingeborenen Ideen versehen hatte. Beide Auffassungen von Wahrheit sind durch und durch statisch, die Wahrheit existiert hier als gegebenes System und ist keiner Veränderung durch den Menschen fähig, dieses System beantwortet alle Fragen des Menschen, oft sogar, bevor er sie überhaupt gestellt hat. *Die Philosophie Descartes' hat auf alles eine Antwort, und das ist ihre Hauptschwäche; das Denken Bacons stellt alles in Frage, es fragt nach allem ...*, sagt GUSDORF beim Vergleich zwischen DESCARTES und F. BACON (GUSDORF 1977, S. 48; Unterstreichung von mir). Zum ersten Mal trat in dieser Zeit der Gedanke auf, daß es zumindest eine ebenso große Aufgabe der Wissenschaft ist - wenn nicht sogar ihre Aufgabe schlechthin -, Fragen zu stellen und Probleme zu formulieren, wie Fragen zu beantworten, die eventuell niemand gestellt hat, und Probleme zu lösen, die für kaum jemanden problematisch waren.

Gegen Ende des 17. Jahrhunderts trat bereits ein Gedanke auf, der heutzutage in der POPPERschen Erkenntnistheorie

sehr aktuell ist: die Unterscheidung zwischen dem Begriff der "Wahrheit" auf der einen Seite und dem Begriff der "Sicherheit der Erkenntnis dieser Wahrheit" auf der anderen Seite. So heißt es bei Christian HUYGENS im Vorwort zu PERRAULTs "Traité de l'Origine des Fontaines" aus dem Jahr 1673 (GUSDORF 1969, Bd. I, S. 352): *Ich glaube nicht, daß wir etwas sehr sicher wissen, sondern alles nur wahrscheinlich, und daß es Abstufungen der Wahrscheinlichkeit gibt, die stark unterschiedlich sind, einige etwa Hunderttausend zu Eins, wie die geometrischen Beweise.*

Und PERRAULT selbst beschreibt im Jahr 1680 den Prozeß der Wahrheitsfindung als einen zunächst divergenten Prozeß (PERRAULT 1680, t. I, S. III-IV): *Mein Gedanke ist, daß das nicht nur mit einer völligen Freiheit, alles vorauszusetzen, was nicht den als wahr erwiesenen Tatsachen zuwiderläuft, geschehen kann, und die in gewisser Weise in der Lage ist, ein klares und vertrautes Verständnis der unbekannten Dinge zu gewähren; sondern ich glaube sogar, wenn die Beispiele von berühmten Philosophen dazu das Recht geben, daß es erlaubt ist, dazu die bizarrsten Vorstellungen zu gebrauchen, vorausgesetzt, daß es sich nicht um eine Sache handelt, die bereits als sicher und überzeugend erkannt worden ist. Denn die Wahrheit ist, daß die Anhäufung aller Phänomene, die zu einem Wissen führen können, das die Natur verbergen wollte, eigentlich nur ein Rätsel ist, für das man mehrere Erklärungen geben kann, von dem es aber niemals die eine wahre geben wird ...*

Dieselben Gedanken traten im 17. Jahrhundert auch bereits bei PASCAL auf. Er unterschied schon drei Aspekte der Wahrheit (PASCAL 1847, S. 376): *Man kann beim Studium der Wahrheit drei wesentliche Ziele haben: das eine, sie zu entdecken, wenn man sie sucht; das andere, sie zu beweisen, wenn man sie besitzt; das letzte, sie von der Falschheit zu unterscheiden, wenn man sie untersucht.*

Auch CASTEL, auf den ich später noch im Zusammenhang mit seiner Kritik an EUKLID genauer eingehen werde, trifft in seinem Werk "Mathématique Universelle" bereits die Unter-

scheidung zwischen Sicherheit und Wahrheit (CASTEL 1728, S. 3): *Es ist die Gewißheit, die die Mathematik und im allgemeinen alle Wissenschaften charakterisiert: Man muß aber die Wahrheit des Gegenstandes von der Gewißheit der Kenntnis, die man über ihn hat, unterscheiden. Ich gebe zu, daß die Wahrheit in sich unteilbar ist: Aber man muß auch zugeben, daß die Kenntnis und die Gewißheit stets vermehrt oder vermindert werden können, unbegrenzt.*

Mit dieser Änderung des Wahrheitsbegriffs bekam auch der Begriff des wissenschaftlichen Irrtums eine ganz andere Bedeutung. Langsam setzte sich die Erkenntnis durch, daß der wissenschaftliche Irrtum nicht eine Verirrung des menschlichen Geistes ist (was er für DESCARTES noch war), sondern eine Notwendigkeit im Erkenntnisprozeß. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts faßte CONDILLAC diesen Gedanken so zusammen (CONDILLAC 1798 a, S. 6): *Es ist wesentlich für jeden, der selbständig Fortschritte bei der Suche nach Wahrheit machen will, die Irrtümer jener zu kennen, die ihm den Weg zu öffnen glaubten. Die Erfahrung des Philosophen, wie die des Steuermanns, ist die Kenntnis der Klippen, an denen andere gestrandet sind; und ohne diese Kenntnis kann er kein Führer sein ...*

Mit dieser veränderten Auffassung des Irrtums begann - initiiert wiederum von F. BACON - die Haltung gegenüber der wissenschaftlichen Geschichtsschreibung sich ebenfalls zu ändern. War für DESCARTES eine wissenschaftliche Geschichtsschreibung noch völlig überflüssig, wenn nicht sogar schädlich, da sie ja doch nur ein Kuriositätenkabinett der Verirrungen des menschlichen Geistes sein konnte bei dem Versuch, in den Besitz d e r einen Wahrheit zu gelangen, so setzte sich jetzt langsam die Einsicht durch, daß Irrtümer durchaus einen positiven, fruchtbaren Einfluß auf den Werdegang der Wissenschaft haben. Auf dieses Bewußtwerden der "Historischen Dimension", insbesondere im 18. Jahrhundert, werde ich später noch genauer eingehen.

4.6 Die allgemeine Wertschätzung der analytischen Methode in Frankreich im 18. Jahrhundert

Die von NEWTON und seinem Hauptwerk "Principia mathematica philosophiae naturalis" ausgehenden Änderungen des physikalischen Weltbildes und der Methodologie der Wissenschaften bewirkte in Frankreich zur Zeit der Aufklärung eine starke Wertschätzung der analytischen Methode gegenüber der synthetischen Methode, die so weit ging, daß CONDILLAC 1798 in seinem Werk "La Logique" den Hauptunterschied zwischen beiden darin sah, *daß die Analyse immer gut anfängt, und die Synthese immer schlecht anfängt. (En ce que l'analyse commence toujours bien, et que la synthèse commence toujours mal.)* (CONDILLAC 1798 b, S. 151.)

Noch im 17. Jahrhundert hatten ARNAULD und auch DESCARTES die analytische und die synthetische Methode für einander ausschließend, einander völlig entgegengesetzt angesehen. So heißt es bei ARNAULD in seiner "La Logique, ou l'Art de penser" (ARNAULD 1854, S. 273-274): *Man kann allgemein "Methode" die Kunst nennen, eine Folge mehrerer Gedanken gut darzulegen, entweder, um die Wahrheit zu entdecken, wenn wir sie nicht kennen, oder um sie andere erkennen zu lassen, wenn wir sie schon kennen.*
So gibt es zwei Arten von Methoden; die eine, um die Wahrheit zu entdecken, die man "Analyse" oder "Methode der Resolution" nennt, und die man auch "Methode der Erfindung" nennen kann; und die andere, um sie anderen mitzuteilen, wenn man sie gefunden hat, die man "Synthese" oder "Methode der Zusammensetzung" nennt, und die man auch "Methode der Doktrin" nennen kann.

CASTEL war einer der ersten, der darauf hinwies, daß diese verschiedene Aufgabenstellung der Analyse und der Synthese nicht angebracht ist. Er bezieht sich im folgenden auf DESCARTES (CASTEL 1728, S. 99): *Ich muß zunächst sagen,*

daß ich, durch eine fast blinde Achtung vor einem so großen Mann, immer geglaubt habe, daß die Analyse die eigentliche Methode der Erfindung sei, und daß die Synthese die einzige Methode der Doktrin sei. Ich habe sogar lange gegen die Offensichtlichkeit der Sache gekämpft, die mein Geist erfaßte, oder die meinen Geist erfaßte ...

Und an anderer Stelle (S. 208): *Man hat bis hierher gesagt, wahrscheinlich mehr aus Instinkt als aufgrund eines sinnesmäßigen oder vernunftmäßigen Beweises, daß die Methode der Doktrin, die man sehr unglücklich "Synthese" nannte, reziprok sei zur Methode der Erfindung, die man mit der Analyse vermengte. Aber man hat nicht darauf geachtet, daß jede dieser Methoden die andere enthielt, und daß es immer dieselbe war, nur in umgekehrter Ordnung.*

Völlig klar wurde das Nichtvorhandensein dieses Gegensatzes zwischen analytischer und synthetischer Methode gegen Ende des 18. Jahrhunderts bei CONDILLAC (1798 b, S. 150-151): *Man nimmt an, daß die Eigentümlichkeit der Synthese darin besteht, unsere Ideen zusammenzusetzen, und daß die Eigentümlichkeit der Analyse ist, sie zu zerlegen ... Aber, ob man gut oder schlecht schlußfolgert, der Geist muß immer notwendigerweise Schritt um Schritt auf- oder absteigen; oder, um einfacher zu sprechen, es ist ihm eigen, ebenso zusammenzusetzen wie zu zerlegen, denn eine Reihe von Schlußfolgerungen ist und kann nur eine Reihe von Zusammensetzungen und Zerlegungen sein. Es wäre absurd, sich vorzustellen, daß diese beiden Dinge sich ausschließen, und daß man schlußfolgern könnte, indem man sich nach eigener Wahl untersagt, zusammenzusetzen oder zu zerlegen.*

Was für eine überwältigende Wertschätzung die analytische Methode gegenüber der synthetischen Methode zur Zeit der Aufklärung in Frankreich erfuhr, läßt sich erahnen anhand des Artikels "Analyse" der in den Jahren 1751 bis 1780 erschienenen "Encyclopédie" von DIDEROT und D'ALEM-

BERT. Dieser Artikel, der zehn Jahre nach CLAIRAUTs "Eléments de géométrie" und fünf Jahre nach seinen "Eléments d'algèbre" erschien, scheint an einigen Stellen, in denen es um Wissensvermittlung geht, indirekt eine Lobrede und eine nachträgliche Begründung und Rechtfertigung der CLAIRAUTschen Darstellungsform zu sein[1] (obwohl CLAIRAUT in dem Artikel nicht erwähnt wird).
Da der Artikel die wissenschaftliche Einstellung gegenüber der analytischen und der synthetischen Methode sehr gut wiedergibt, möchte ich ihn hier ausführlich zitieren (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751-80): *Die Analyse ... ist das, was man in den Schulen "die Methode, der man folgt, um die Wahrheit zu entdecken", nennt; man nennt sie außerdem auch die "Methode der Resolution". Mit Hilfe dieser Methode gelangt man vom Zusammengesetztesten zum Einfachsten; bei der Synthese hingegen geht man vom Einfachsten zum Zusammengesetztesten. Da diese Definition nicht sehr exakt ist, sei es uns erlaubt, eine andere zu geben. Die Analyse besteht darin, zum Ursprung unserer Ideen zurückzukehren, ihre Aufeinanderfolge zu entwickeln und sie in unterschiedlicher Weise zusammenzusetzen und zu zerlegen, um sie von allen Seiten zu vergleichen, wodurch sie ihre wechselseitigen Abhängigkeiten zeigen können. Wird die Analyse so definiert, so ist leicht zu sehen, daß sie das wahre Geheimnis der Entdeckungen ist. Sie hat den Vorteil gegenüber der Synthese, daß sie immer nur wenige Ideen zugleich anbietet, und immer in einfachster Abstufung. Sie ist Feind der vagen Prinzipien, und von allem, was der Exaktheit und der Präzision zuwiderläuft. Sie nimmt nicht die Hilfe allgemeiner Lehrsätze in Anspruch, um die Wahrheit zu suchen: sondern immer durch eine Art "Kalkül", das heißt, indem sie die Kenntnisse zerlegt und zusammensetzt, um sie auf vorteilhafteste Weise mit den Entdeckungen, die man im Auge hat, zu vergleichen. Das*

[1] Dies ist um so leichter zu verstehen, wenn man weiß, daß der Artikel nicht von D'ALEMBERT verfaßt worden ist (vgl. Kapitel 2 und 3).

geschieht nicht durch Definitionen, die normalerweise nur den Streit vermehren: sondern dadurch, daß die Aufeinanderfolge der Ideen erklärt wird. An diesem Detail sieht man, daß sie die einzige Methode ist, die unseren Schlußfolgerungen Evidenz geben kann; und konsequenterweise die einzige, der man bei der Suche der Wahrheit folgen darf, und sogar dabei, andere zu belehren; eine Ehre, die man normalerweise der Synthese zuteil werden läßt. Nun handelt es sich darum, das, was wir gerade vorgebracht haben, zu beweisen.

Im allgemeinen stimmen alle Philosophen darin überein, daß man sowohl bei der Darstellung der Wahrheit als auch bei ihrer Suche bei den einfachsten und leichtesten Ideen beginnen muß: Aber sie stimmen nicht mehr über die Vorstellung überein, die sie sich von diesen einfachen und leichten Ideen machen. Fast alle Philosophen, an deren Spitze man Descartes setzen kann, geben diesen Namen den eingeborenen Ideen, den allgemeinen Prinzipien, den abstrakten Vorstellungen, die sie als Quelle unserer Kenntnisse ansehen. Daraus folgt notwendigerweise, daß man mit der Definition der Dinge anfangen muß, und die Definitionen als Prinzipien ansehen muß, die geeignet sind, darin die Eigenschaften dieser Dinge zu entdecken. Wenige andere, wie Locke und Bacon, verstehen unter "einfachen Ideen" die ersten speziellen Ideen, die uns durch die Sinne und durch die Reflexion entstehen: Das sind die Bausteine unseres Wissens, die wir gemäß den Umständen kombinieren, um daraus komplexe Ideen zu bilden, deren Analyse uns ihre wechselseitigen Abhängigkeiten aufdeckt. Sie dürfen nicht mit den abstrakten Vorstellungen vermischt werden, noch mit den allgemeinen Prinzipien der Philosophie; es sind im Gegenteil dazu die, die uns unmittelbar aus den Sinnen entstehen, und unter deren Schutz wir uns hernach gradweise zu einfachsten oder zusammengesetztesten Ideen aufschwingen. Ich sage "zusammengesetzteste", weil die Analyse nicht immer darin besteht, wie man es sich gemeinhin vorstellt, vom Zusammengesetztesten zum Einfachsten zu

gehen.

Es scheint mir, daß, wenn man die Aufeinanderfolge der Wahrheiten gut verstände, es unnütz wäre, nach Schlußfolgerungen zu suchen, um sie zu beweisen, und daß es genügen würde, sie zu nennen; denn sie würden in einer derartigen Ordnung aufeinander folgen, daß das, was man der unmittelbar vorhergehenden hinzufügen würde, zu einfach wäre, um eines Beweises zu bedürfen. Auf diese Art würde man bei den kompliziertesten Wahrheiten anlangen, und man würde sich ihrer besser versichern, als auf allen anderen Wegen. Man würde sogar zwischen allen erworbenen Kenntnissen eine so große Unterordnung etablieren, daß man wahlweise von den kompliziertesten zu den einfachsten oder von den einfachsten zu den kompliziertesten gehen könnte. Man könnte sie kaum vergessen; oder zumindest, wenn es doch vorkäme, würde die Verbindung zwischen ihnen es erleichtern, sie wiederzufinden.

Aber um den Vorteil der Analyse gegenüber der Synthese noch besser spüren zu lassen, befragen wir die Natur, und folgen der Ordnung, die sie selbst bei der Darstellung der Wahrheit anzeigt. Wenn alle unsere Kenntnisse aus den Sinnen kommen, so ist es offensichtlich, daß es den einfachen Ideen zukommt, das Verständnis der abstrakten Vorstellungen vorzubereiten. Ist es vernünftig, mit der Idee des Möglichen zu beginnen, um bei der Existenz anzulangen, oder mit der Idee des Punktes anzufangen, um zu der des Körpers zu gelangen? Es ist offensichtlich, daß das nicht der natürliche Weg des menschlichen Geistes ist: Wenn die Philosophen Mühe haben, diese Wahrheit anzuerkennen, so deswegen, weil sie sich voreinnehmen lassen durch einen Gebrauch, den die Zeit geheiligt zu haben scheint.

Selbst die Geometer, die die Vorteile der Analyse besser kennen müßten als die anderen Philosophen, geben oft der Synthese den Vorzug; und wenn sie ihre Rechnungen verlassen, um sich anderen Forschungen unterschiedlicher Natur zu widmen, so findet man bei ihnen nicht mehr dieselbe Klar-

heit, dieselbe Präzision, noch dieselbe Geistesgröße. Aber wenn die Analyse die Methode ist, der man bei der Suche der Wahrheit folgen muß, so ist sie auch die Methode, deren man sich bedienen muß, um die Entdeckungen, die man gemacht hat, darzustellen. Ist es nicht eigenartig, daß die Philosophen, die spüren, wie nützlich die Analyse bei der Entdeckung der Wahrheit ist, nicht dieses selbe Mittel zu Hilfe nehmen, um sie leichter in den Geist der anderen gelangen zu lassen? Es scheint, daß die beste Art, andere zu belehren, ist, sie auf dem Weg zu führen, den man nehmen mußte, um sich selbst zu belehren. Auf diese Weise beweist man weniger die bereits gefundenen Wahrheiten, als neue suchen und finden zu lassen. Man würde den Leser nicht nur überzeugen, sondern auch aufklären; und indem man ihn lehrt, selbst Entdeckungen zu machen, würde man ihm die Wahrheit in interessantester Weise darbieten. Schließlich würde man ihn befähigen, sich über alle seine Schritte Klarheit zu verschaffen; er wüßte immer, wo er ist, von wo er kommt, wohin er geht; er könnte also den Weg, den sein Führer ihm vorgezeichnet hat, selbst beurteilen, und einen sichereren wählen, wenn er eine Gefahr erkennen würde.

Aber um hier eine Erklärung der Analyse zu geben, was ich mir ja vorgenommen habe, stellen wir uns den Fall vor, zum ersten Mal die elementaren Vorstellungen der Mathematik zu erwerben. Wie würden wir da vorgehen? Wir würden zweifellos damit beginnen, uns die Idee der Einheit zu erstellen; und indem man sie mehrere Male zu sich selbst hinzufügt, würden wir daraus eine Kollektion bilden, die wir durch Linien fixieren würden; diese Operationen würden wir wiederholen, und damit hätten wir bald über die Zahlen so viele komplexe Ideen, wie wir es nur wünschten. Hernach würden wir darüber nachdenken, auf welche Art sie entstanden sind; wir würden ihren Fortschritt beobachten, und wir würden unfehlbar die Mittel kennenlernen, um sie zu zerlegen. Und schon könnten wir die kompliziertesten mit den einfachsten vergleichen und die Eigenschaften der einen

und der anderen entdecken.
Bei dieser Methode hätten die Operationen des Geistes nur diejenigen einfachen oder komplexen Ideen zum Gegenstand, die wir gebildet hätten, und deren Aufeinanderfolge wir perfekt kennen würden: Wir würden also keinerlei Hindernis finden, die ersten Verhältnisse von Größen zu entdecken. Und wären die bekannt, so würden wir leichter jene sehen, die ihnen unmittelbar folgen, und die uns sicher noch andere erkennen ließen; so würden wir uns, ausgehend von den einfachsten, unmerklich zu den zusammengesetztesten erheben, und wir würden eine Folge von Kenntnissen erstellen, die so stark ineinander verzahnt wären, daß man bei den entferntesten nie anlangen könnte, ohne bei den unmittelbar vorhergehenden vorbeizukommen.

Anschließend folgt ein Abschnitt über andere Wissenschaften, der hier weggelassen wird. Danach heißt es weiter:
Da wir also nur aus einfachen Ideen oder aus komplexen Ideen, die das Werk unseres Geistes wären, schlußfolgerten, hätten wir zwei Vorteile; der erste wäre, daß wir, da wir die Abfolge der Ideen, über die wir nachdächten, kennten, niemals fortschreiten würden, ohne zu wissen, wo wir sind, wie wir dorthin gekommen sind und wie wir umkehren könnten: Der zweite wäre, daß wir bei jeder Materie spürbar sehen würden, welches die Grenzen unserer Kenntnisse wären; denn wir würden auf sie stoßen, wenn uns die Sinne nicht mehr mit Ideen versorgen würden, und der Geist demzufolge keine Vorstellungen mehr bilden könnte.
Alle Wahrheiten beschränken sich auf die Verhältnisse, die zwischen den einfachen Ideen, den komplexen Ideen, und innerhalb einer einfachen und zugleich komplexen Idee (idée simple & complexe) bestehen. Mit Hilfe der Methode der Analyse könnte man die Irrtümer vermeiden, die man auf der Suche der einen sowie der anderen begehen könnte. Die einfachen Ideen können zu keinerlei Mißverständnis Anlaß geben. Der Grund unserer Irrtümer liegt darin, daß wir von einer Idee etwas abschneiden, was zu ihr gehört, weil wir sie nicht vollständig überblicken; oder darin,

daß wir ihr etwas hinzufügen, was nicht zu ihr gehört, weil unsere Vorstellung überstürzt urteilt, daß sie etwas beinhaltet, was ihr doch nicht zukommt. Nun können wir aber von einer einfachen Idee nichts abschneiden, da wir in ihr ja keine Teile unterscheiden; und wir könnten ihr nichts hinzufügen, solange wir sie als einfach betrachten, da sie dann ihre Einfachhheit verlieren würde.

Diese positive Darstellung der analytischen Methode könnte den Eindruck erwecken, als ob sie im 18. Jahrhundert in Frankreich die einzige Methode war, die angewandt wurde, oder daß CLAIRAUTs Darstellungsform für seine Zeit völlig selbstverständlich war und durchgängig angewandt wurde. Dem ist nicht so. Es finden sich in der Mitte des 18. Jahrhunderts in Frankreich etliche mathematische Lehrbücher, die sehr ähnlich den EUKLIDschen "Elementen" aufgebaut sind, etwa der "Cours de mathématiques" von Charles-Etienne-Louis CAMUS aus dem Jahr 1750, die "Elémens des mathématiques" des Jesuitenpaters Jean-Antoine DUCLOS aus dem Jahr 1737, der mit Definitionen und Theoremen beginnt, die "Elémens d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie" von Jean-Mathurin MAZEAS aus dem Jahr 1758, der ebenfalls mit Axiomen beginnt, und etlichen anderen. BEZOUT wendet sich in seinem 1764/65 erschienenen Werk "Cours des mathématiques" explizit gegen die analytische Methode in der Mathematik, nachdem er ihre scheinbaren Vorteile aufgezählt hat (BEZOUT 1764/65, S. vii-ix): *Die verschiedenen Methoden, denen man bis hierher gefolgt ist, um die Prinzipien der Algebra darzustellen, reduzieren sich auf zwei wesentliche. Die erste besteht darin, die Regeln der vier Fundamentaloperationen anzugeben, nebst denen, die zur Lösung der Gleichungen ersten Grades führen, auf einem Weg, den man als synthetisch betrachten könnte. Die zweite, die rein analytisch ist, führt zur Auffindung dieser Regeln, indem Fragen vorgelegt werden, deren Lösung gewisse Operationen und gewisse Schlußfolgerungen erfordert, die in einer nachträglichen Untersuchung als immer gleich erkannt werden, und die man konsequenterweise als allgemeine Regeln aufstellt.*

Diese letztere Methode schiene zunächst der ersten vorzuziehen zu sein, weil sie scheinbar der Eigenliebe der Anfänger schmeichelt und ihre Neugierde anstachelt. Aber wenn man darüber nachdenkt, daß dann die Aufmerksamkeit notwendigerweise sich auf drei Dinge aufteilen muß, nämlich den Zustand der Frage zu kennen, die Schlußfolgerungen, um sie algebraisch auszudrücken, und die Operationen, die man mit Hilfe von Zeichen machen muß, deren Bezeichnung man umso leichter vergißt, wenn man noch wenig geübt ist, seine Ideen auf so abstrakte Weise auszudrücken, dann scheint es mir, daß man bezweifeln könnte, daß diese Methode am Anfang für die meisten Leser die bessere sei. Im Gegenteil, würde sie nicht sogar eine Wirkung erzeugen, die derjenigen, die manche ihr zuschreiben, völlig entgegengesetzt wäre? Die Schlußfolgerungen, die sie erfordert, wenn auch am Anfang noch einfach, wo man zweifellos nur einfache Fragen behandelt, demütigen diese Schlußfolgerungen, so frage ich, nicht, wenn sie sich dem Leser nicht offenbaren, da sie ja aus dem erstehen sollen, der handelt? Die Methode der Erfindung erfordert immer einen gewissen Scharfsinn; ihr mußten die Erfinder folgen, und konsequenterweise Männer mit Genie; die gibt es aber sicherlich nicht sehr oft.

Aber diese teilweise Ablehnung der analytischen Methode blieb im wesentlichen auf die Mathematik beschränkt. Es finden sich in der "Encyclopédie" von DIDEROT und D'ALEMBERT noch etliche Artikel, die für die analytische Methode sprechen, ebenso in VOLTAIREs "Dictionnaire philosophique" und in vielen anderen Werken. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts faßte CONDILLAC in seinem "Essai sur l'origine des connoissances humaines" die Überlegungen seiner Vorgänger während der Aufklärung über die Vorteile der analytischen Methode noch einmal ausführlich zusammen; bei einigen seiner Begründungen besteht eine auffallende Ähnlichkeit zu den Überlegungen CLAIRAUTs und oft sogar eine wörtliche Übereinstimmung mit dem Artikel "Analyse" der "Encyclopédie" (CONDILLAC 1798 a, S. 513-515): *Bei der Darstellung wie*

bei der Suche der Wahrheit muß man bei den leichtesten Ideen anfangen, die unmittelbar den Sinnen entspringen, um sich gradweise zu einfacheren oder zusammengesetzteren Ideen zu erheben. Es scheint mir, daß, wenn man die Aufeinanderfolge der Wahrheit gut verstände, es unnütz wäre, nach Schlußfolgerungen zu suchen, um sie zu beweisen, und daß es genügen würde, sie zu nennen; denn sie würden in einer derartigen Ordnung aufeinander folgen, daß das, was man der unmittelbar vorhergehenden hinzufügen würde, zu einfach wäre, um eines Beweises zu bedürfen. Auf diese Art würde man bei den kompliziertesten Wahrheiten anlangen, und man würde sich ihrer besser versichern als auf allen anderen Wegen. Man würde sogar zwischen allen erworbenen Erkenntnissen eine so große Unterordnung etablieren, daß man wahlweise von den kompliziertesten zu den einfachsten oder von den einfachsten zu den kompliziertesten gehen könnte. Man könnte sie kaum vergessen; oder zumindest, wenn es doch vorkäme, würde die Verbindung zwischen ihnen es erleichtern, sie wiederzufinden.

Um aber die Wahrheit in der perfektesten Ordnung darzustellen, muß man diejenige erkannt haben, in der sie in natürlicher Weise hätte gefunden werden können; denn die beste Art, andere zu belehren, ist, sie auf dem Weg zu führen, den man nehmen mußte, um sich selbst zu belehren. Auf diese Weise beweist man weniger die bereits gefundenen Wahrheiten als neue suchen und finden zu lassen. Man würde den Leser nicht nur überzeugen, sondern auch aufklären; und indem man ihn lehrt, selbst Entdeckungen zu machen, würde man ihm die Wahrheit in interessantester Form darbieten. Schließlich würde man ihn befähigen, sich über alle seine Schritte Klarheit zu verschaffen; er wüßte immer, wo er ist, von wo er kommt, wohin er geht; er könnte also den Weg, den sein Führer ihm vorgezeichnet hat, selbst beurteilen, und einen sichereren wählen, wenn er eine Gefahr erkennen würde.

Insgesamt läßt sich also interessanterweise - insbesondere auch aus heutiger aktueller Sicht - feststellen, daß sich

in Frankreich im 18. Jahrhundert mit dem NEWTONschen Weltbild, auch was die Wissenschaft allgemein anlangt, die analytische Methode auf breiter Front durchsetzte und als d i e wissenschaftliche Methode schlechthin, nicht nur bei der Suche nach der Wahrheit, sondern auch bei der Darstellung der Wahrheit angesehen wurde. Innerhalb dieser Bewegung war die auch damals überwiegende Ablehnung der analytischen Methode bei der Darstellung mathematischer Theorien durch die Mathematiker eher eine Gegenbewegung.

An dieser Stelle wird ein weiteres Motiv deutlich, warum CLAIRAUT in seinen beiden Lehrbüchern den heuristischen Darstellungsstil gewählt hat: Er war nicht nur Mathematiker, sondern - im umfassenderen Sinn - Naturwissenschaftler und als solcher NEWTONs Physik und insbesondere seiner analytischen Methode sehr verbunden. Als Mitglied eines wissenschaftlich-philosophischen Kreises um VOLTAIRE und MAUPERTUIS stand CLAIRAUT den Grundideen der Aufklärung nahe. Seine Lehrbücher können daher als Versuch interpretiert werden, die allgemein - in Wissenschaft und Aufklärung - herrschende Bewegung zugunsten der analytischen Methode auch auf die Mathematik zu übertragen.

4.7 Die Abneigung gegen das Systemdenken

The most ingenious way of becoming foolish is by a system.

SHAFTESBURY, 1711

Eng verbunden mit der Wertschätzung der analytischen Methode und der damit zusammenhängenden Ablehnung der synthetisch-deduktiven Methode ist die Ablehnung des Systemdenkens des 17. Jahrhunderts durch alle Denker und Wissenschaftler der Aufklärung in Frankreich. *Das siebzehnte Jahrhundert hatte die eigentliche Aufgabe der philosophischen Erkenntnis im Aufbau des philosophischen "Systems" gesehen. Wahr-*

haft "philosophisches" Wissen erschien ihm erst dann erreicht und erst dann gesichert, wenn es dem Gedanken gelingt, von einem höchsten Sein und einer höchsten, intuitiv-erfaßten Grundgewißheit ausgehend, das Licht dieser Gewißheit über alles abgeleitete Sein und über alles abgeleitete Wissen zu verbreiten. Dies geschieht, indem durch die Methode des Beweises und der strengen Schlußfolgerung an die erste ursprüngliche Gewißheit andere Sätze mittelbar angeknüpft und auf dem Wege dieser mittelbaren Verknüpfung schließlich die gesamte Kette des Wißbaren durchlaufen und in sich geschlossen wird. Kein Glied dieser Kette kann aus dem Ganzen herausgelöst werden; keines vermag sich durch sich selbst zu erklären. Die einzige wahrhafte Erklärung, die es finden kann, besteht vielmehr in seiner "Ableitung", - in der strengen systematischen Deduktion, durch welche es auf den Urgrund des Seins und der Gewißheit zurückgeführt und durch welche seine Entfernung von diesem Urgrund gemessen, durch welche die Zahl der Mittelglieder, die es von ihm trennen, bestimmt wird (CASSIRER 1973, S. 6,7).

Dieses Systemdenken ist für die Denker der Aufklärung nicht nur ein überkommenes und veraltetes Mittel der Erkenntnis, sondern darüber hinaus ein wahrer Hemmschuh jeglicher Erkenntnis. So heißt es im Artikel "Philosophie" der "Encyclopédie" (Autor des Artikels war DIDEROT) (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751-80): *Zwei Haupthindernisse haben lange Zeit den Fortschritt der Philosophie aufgehalten, die Autorität und der Systemgeist. Ein wahrer Philosoph sieht nicht durch die Augen anderer, er gibt sich nur der Überzeugung hin, die aus der Evidenz entsteht. Es ist ziemlich schwierig zu verstehen, wie es geschehen kann, daß Leute mit Geist sich bei der Suche nach Wahrheit lieber des Geistes anderer bedienen, als dessen, den Gott ihm gegeben hat ...*

DIDEROT begründet die negativen Auswirkungen des Systemdenkens in den weiteren Ausführungen so: *Was also den Systemgeist so gegensätzlich zum Fortschritt der Wahrheit macht, ist, daß es nicht mehr möglich ist, jene eines Bes-*

seren zu belehren, die ein System von einiger Wahrscheinlichkeit ersonnen haben. Sie bewahren und behalten alle Dinge, die in irgendeiner Weise dazu dienen können, es zu bestätigen, und im Gegensatz dazu sehen sie kaum eine Entgegnung, die ihm zuwiderläuft, oder sie entledigen sich ihrer durch irgendeine nichtige Unterscheidung. Sie gefallen sich im Glanz ihres Werks und der Wertschätzung, die sie dadurch zu bekommen erhoffen. Sie beziehen sich nur auf das Bild der Wahrheit, das in ihren wahrscheinlichen Meinungen enthalten ist. Sie halten dieses starre Bild vor ihren Augen fest, aber sie schauen es niemals von anderen Seiten an, was ihnen seine Falschheit offenbaren würde.

Im Artikel "Système" der "Encyclopédie" heißt es (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751-80): *Der Cartesianismus, der dem Peripatetismus gefolgt war, hatte die Vorliebe für Systeme stark in Mode gebracht. Heutzutage, dank Newton, scheint es, daß man von diesem Vorurteil abgekommen ist, und daß man keine andere wahre Physik anerkennt als die, die sich auf Erfahrungen stützt, und die diese erklärt durch exakte und präzise Schlußfolgerungen, und nicht durch vage Erklärungen.*

Auch VOLTAIRE erwähnt im "Prêface historique" der französischen Übersetzung von NEWTONs "Principia mathematica philosophiae naturalis", daß NEWTON selbst kein System geschaffen hat (NEWTON 1759, S. vj): *In der Tat schuf Newton niemals ein System, setzte nichts voraus und lehrte niemals eine Wahrheit, die nicht auf feinster Geometrie oder auf unleugbaren Erfahrungen gegründet war.*

Auch MAUPERTUIS, Freund CLAIRAUTs, erklärte sich zum absoluten Gegner des Systemdenkens (BRUNET 1929 b, S. 358): *Die Systeme sind wirkliche Unglücke für den Fortschritt der Wissenschaften: Ein systematischer Autor sieht nicht mehr die Natur, er sieht nur sein eigenes Werk. Alles, was seinem System nicht absolut entgegensteht, bestätigt es: Und die Phänomene, die zu ihm im größten Widerspruch stehen, sind nur einzelne Ausnahmen.*

Bei allen mit CLAIRAUT eng verbundenen Wissenschaftlern und Denkern der Aufklärung sehen wir also eine starke Ablehnung jeglichen Systemdenkens. Mit der analytischen Methode glaubte das 18. Jahrhundert die natürliche Ordnung der Dinge erfassen zu können, anstatt mittels der starren Ordnung eines Systems alle Dinge deduktiv erklären und ableiten zu wollen. Das statische, gegebene System trat völlig in den Hintergrund zugunsten der Dynamik der Wahrheitssuche. Auch hier liegt die Vermutung nahe, daß CLAIRAUT diesen Gedanken der Aufklärung in seinen Lehrbüchern aufgreifen wollte, daß er nicht ein gegebenes System mathematischer Wahrheiten vorführen wollte, sondern daß es ihm darauf ankam, den Prozeß der Entdeckung dieser Wahrheiten zutage trèten zu lassen. Beispielsweise ist sein "System" der Kongruenzsätze unvollständig: Aber ihm kam es eben nicht auf die Vollständigkeit und Abgeschlossenheit eines Systems an, sondern darauf, daß der Leser die Einzelwahrheiten selbst entdeckte.

4.8 Zur Kritik an EUKLID in Frankreich im 18. Jahrhundert

Alle bisher genannten Vertreter der Kritik an EUKLID gingen von einer Kritik an dessen deduktivem System aus. Ihre Hauptkritikpunkte waren: EUKLID vernachlässigt die natürliche Aufeinanderfolge und Verbindung der einzelnen Ideen und Begriffe; er beweist Aussagen, die absolut keines Beweises bedürfen, weil sie evident sind; und schließlich: Seine Beweise "beweisen" zwar, liefern dem Schüler aber nicht unbedingt das Verständnis für die bewiesene Aussage - von SCHOPENHAUER später "Mausefallenbeweis" genannt.

Wenn auch alle EUKLID-Kritiker mit der mathematischen Strenge und der Trockenheit der Bücher EUKLIDs unzufrieden waren, so ging es ihnen doch nicht darum, diese Strenge einfach - innermathematisch - abzuschaffen. Ihr Anliegen ist vielmehr ein pädagogisches (WALUSINSKI 1957, S. 294-295): *Es*

wurde bereits gesagt, aber es lohnt sich, es zu wiederholen, daß diese "intuitiven" Methoden das Ideal der Strenge, welches jeden noch jungen Mathematiker anregt, der dieses Namens würdig ist, nicht mit Füßen treten; im Gegenteil, sie verstehen es, die Schüler dahin zu führen, diese Strenge zu wünschen, von selbst den Grad an Strenge zu erlangen, der mit ihrer geistigen Entwicklung vereinbar ist. Die Zuflucht zur Beobachtung des Reellen bringt die überlegte Anwendung der Modelle mit sich, besonders derjenigen, die von den Schülern selbst abgefaßt und realisiert wurden, ... und die Sorge, alle Gelegenheiten auszunutzen, die erworbenen Kenntnisse anzuwenden, immer auch mit dem Gedanken, Wissenschaft und Forschung beliebt zu machen.

Im 18. Jahrhundert wurde diese Entwicklung unter anderem von dem Jesuitenpater Louis-Bertrand CASTEL fortgeführt. Er war Maître am Jesuitenkolleg Louis-le-Grand in Paris von 1720 bis 1757. CASTEL wird in der Reihe derer, die in Frankreich schon früh Kritik an EUKLID geübt haben, selten, sein Hauptwerk "Mathématique universelle, abregée à l'usage et à la portée de tout le monde" aus dem Jahr 1728 so gut wie nie erwähnt. Und doch scheint mir gerade dieses Werk von äußerster Wichtigkeit zu sein bei der Entwicklung der intuitiven Methode in Frankreich. EUKLID wird selten genannt, aber der ganze Aufbau des Buches als auch das Vorwort lassen explizit erkennen, daß es dem EUKLIDischen Aufbau konträr gegenübersteht.

Besonders interessant ist die "Mathématique universelle" wegen ihrer vielseitigen Behandlung der Mathematik, die sich nicht darin erschöpft, die Mathematik antieuklidisch aufzubauen, sondern die auf breitem Raum eine Methodenlehre der Mathematik entwickelt. Diese Methodenlehre hat in weiten Bereichen Anklänge an die Heuristik Georg POLYAs.

Im Vorwort des Buches wird deutlich, daß auch CASTEL - wie RAMUS und ARNAULD zuvor - nicht nur innermathematische Ziele verfolgt, sondern pädagogische: Er geht im folgenden auf die Anfängerschwierigkeiten ein und gibt einen Über-

blick, wie er ihnen begegnen will, indem er nämlich das natürliche Beziehungsgefüge erhalten will (CASTEL 1728): *Es gibt unendlich viele Leute, die Geometer sein wollen; sie machen dafür die ersten Anschaffungen, kaufen Bücher, Reißzeug, ein Lineal und einen Zirkel und nehmen sich einen Lehrer. Aber unter Hunderten befindet sich kaum einer, der mehr als fünfzig Lehrsätze beherrscht. Wenn so viele Geister von der Geometrie abgeschreckt werden, wenn man auf hundert Physiker einen Geometer findet, so liegt der Fehler in der Methode des Geometrieunterrichts.*

Und an anderer Stelle (CASTEL 1728, S. IV): *Denn dieser Anschein von Orakeln, Apophtegmen oder tiefer und abstrakter Urteile, den sich die Geometrie gibt, flößt einem Anfänger eine Art Bewunderung und Entzücken ein, die sich nach drei oder vier Tagen des Studiums erschöpfen, und die bei der ersten auftauchenden Schwierigkeit ganz verschwinden; besonders, wenn man nach einem Gewaltmarsch feststellt, daß man einem Autor oder Lehrer einfach Glauben schenkt, ohne genau zu wissen, wohin man geht, warum und wie man vorgeht. Denn diese Linien, diese Winkel, diese A, B und all diese Abstraktionen, um die man sich dreht, bevor man das eigentliche Ziel erreicht oder erblickt, sind nicht gerade sehr tröstliche Gegenstände für die Vorstellungskraft eines Anfängers, der bei jedem Schritt fragt: "Wozu das alles?"*
Ich beginne also, indem ich ihm das Ziel, die Grenze, das Ende, den Gebrauch, alle angrenzenden Gebiete der Geometrie zeige, bevor ich ihn in ein trockenes und sehr genaues Detail von zu streng wissenschaftlichen Aussagen stürze. Selbst wenn ich hinterher zu diesem Detail gelange, stelle ich es nicht ausführlich dar, sondern ich leite es vom Prinzip her, ich lege die Bezüge dar, ich zeige den Gebrauch auf, ich verbinde es mit dem Rest.

Und an einer Stelle innerhalb des Buchs heißt es (S. 207-208): *Es schien mir immer seltsam, daß die Geometrie, das erste aller Gebiete der Mathematik, das schwierigste ist, und daß die Anfangsgründe, die zu Beginn der gesamten*

Geometrie stehen, am trockensten und am nüchternsten, am besten bewiesen, am geometrischsten sind; d.h. am schwierigsten und folglich am wenigsten elementar sind. Und deshalb mußte ich, in der Absicht, die Mathematik, besonders die Geometrie, allen zugänglich zu machen, das Fortschreiten der Dinge derart richtig vermitteln, daß die geometrischen Ideen und die perfekten Beweisführungen nicht am Anfang des Werkes standen, sondern nach unendlich vielen anderen Ideen, die ohne Schwierigkeiten viel besser zu dem Geist aller Arten von Anfängern passen, und die, indem sie ihnen die geometrische Denkweise und eine halbe Beweisführung der Dinge vermitteln, sie unmerklich auf Höheres und Perfekteres vorbereiten.

Auf den ersten Seiten der "Mathématique universelle" greift CASTEL einen Aspekt auf, den bereits NICOLE in der "Géométrie de Port-Royal" als wesentlich erachtet hatte: die Verbindung der Geometrie mit den "choses exterieures", die bei CASTEL "objets réels" heißen (S. 2): *... davon überzeugt, die Geometrie sei nur eine vorbereitende Wissenschaft, die als Einleitung zu allen anderen diene, war ich überrascht zu sehen, daß die Geometer aus ihren Entdeckungen ein großes Geheimnis machten und die alltäglichsten Dinge in einer abstrakten Art darstellten, getrennt von allem, nicht auf die Praxis zurückführbar und kein bißchen mit den reellen Dingen der Kunst und den gewöhnlichen Wissenschaften verbunden, indem sie gewissermaßen die Tür auf den First des Gebäudes setzten.*

CASTELs Ziele waren durchaus und sogar hauptsächlich pädagogische, wie bereits eben erwähnt. Denn für einen Mangel der Beschäftigung mit Mathematik hält er es, daß bis zu jenem Zeitpunkt wohl eher die Mathematik verbessert worden ist als diejenigen, die mit ihr umgehen: *Denn, um das nebenbei zu sagen, es scheint, daß man bis heute mehr an der Perfektionierung der Geometrie gearbeitet hat als an der Perfektionierung der Menschen, um deren Verständnis dieser Wissenschaft, die aus sich selbst heraus so geeignet ist, den Geist zu üben und auszubilden, man sich nicht*

sehr bemüht hat (S. 17).

Und an anderer Stelle (S. 105): *Man preist die geometrische Methode bisher stark an, aber es geht nicht darum, Dinge ständig nach dem Hörensagen zu beurteilen. Ich urteile nach Tatsachen: Von allen didaktischen Methoden kenne ich keine schadhaftere als die der Geometrie. Man preist sie für ihre Strenge und erhabene Perfektion an: Aber gerade deshalb halte ich sie für allen anderen unterlegen. Es geht nicht um die Perfektion der Geometrie: Ist sie etwa ein Idol, das man verehren muß? Es geht darum, die Menschen zu perfektionieren und zu schulen. Oder hält man die Geometrie für sehr mitteilsam und lehrreich in ihrer Methode? Man möge das an der kleinen Anzahl von Geometern, besonders der fähigen, beurteilen. Man wird ohne Schwierigkeiten hundert Physiker, hundert Historiker, hundert Metaphysiker auf einen Geometer finden.*

Implizit ebenfalls gegen EUKLID gerichtet ist eine Bemerkung von CASTEL, die deutlich macht, daß er seiner Zeit in philosophischer Hinsicht voraus war (S. 3): *Es ist die Gewißheit, die die Mathematik und im allgemeinen alle Wissenschaften charakterisiert: Man muß aber die Wahrheit des Gegenstandes von der Gewißheit der Kenntnis, die man über ihn hat, unterscheiden. Ich gebe zu, daß die Wahrheit in sich unteilbar ist: Aber man muß auch zugeben, daß die Kenntnis und die Gewißheit stets vermehrt oder vermindert werden können, unbegrenzt.*

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß CASTEL nicht nur die Mathematik und ihre Methode, sondern insbesondere den Mathematikunterricht verbessern wollte. Bei TATON heißt es etwa (TATON 1964, S. 58): *Er wird sich also darangeben, die Geometrie und die ganze Mathematik zu vermenschlichen und gemeinverständlich zu machen. Seine Methode wird darin bestehen, den Ausdruck der geometrischen Ideen spielerischer und ungezwungener zu gestalten. Er wird eher im Gespräch als durch Beweisführung vorgehen, er wird eher über den Sinn als über die reinen Gedanken sprechen. Er belebt*

die Geometrie wieder durch den Kontakt mit der Realität: "Der hochtrabende Begriff 'Parallelepiped' macht unkenntlich, was wir unter dem Namen 'Balken' kennen ... der 'Konus' ist keine seltene Sache: Unsere Zuckerbrote sind Kegel, die Eiben in unseren Gärten sind wie Kegel gespitzt ... ein 'Kubus' ist ein Würfel zum Spielen, ein 'Ellipsoid' hat die Form eines Eies, der abgerundete Umfang eines aufgespannten Fächers ist der 'geometrische Ort', an dem alle Falten oder alle Stäbe des Fächers enden ..."
An die Stelle der deduktiven Methode, die vom Einfachen zum Zusammengesetzten führt (als ob das Einfache leichter wäre als das Zusammengesetzte), setzt er eine Methode des Analysierens, die vom Zusammengesetzten auf die einfachen Ideen zurückführt, "welche der höchste Ertrag und das größte Bestreben der Wissenschaft sind". Er wird seine Schüler unmerklich von der Unwissenheit zur Wissenschaft führen "im Vorbeigehen an der Erleuchtung, der Idee, dem Verdacht, der Möglichkeit, der Vermutung, der Wahrscheinlichkeit, der Wahrheit, der Auffälligkeit", indem er öfter "an den Kreuzungen anhält", um zu sehen, von wo man kommt, wohin man geht, wie man vorgegangen ist. "Der Verdruß ist geringer, wenn man zehnmal zum gleichen Gegenstand zurückkehrt, als wenn man sich zehnmal so lange ohne Unterbrechung darauf fixiert." Er ist für die konzentrische Methode, die mehr und mehr fortschreitet, die die Kenntnisse um einen elementaren Kernpunkt lagert, und für arithmetisches und algebraisches Rechnen ...

Über die Wirkung des Buchs heißt es bei TATON (1964, S. 59): *Das Werk erregte Aufsehen. Die Londoner Geometer erklärten es für "hervorragend und außergewöhnlich". Die Franzosen verschonten es nicht mit Kritiken und strengen Rezensionen, jedoch Fontenelle, der Mercure und die höhere Gesellschaft zollten Beifall.*

Aus der zu CLAIRAUT zeitgenössischen Kritik an EUKLID und seiner Tradition sollen im folgenden nur einige wenige, auch nichtmathematische, Repräsentanten ausgewählt werden.

So schreibt VOLTAIRE im Artikel "Géométrie" seines "Dictionnaire philosophique" (VOLTAIRE 1878, t. 19): *Man muß zugeben, daß Euklid ein wenig abschreckend wirkt; ein Anfänger kann nicht erkennen, wohin er geführt wird. Euklid sagt im ersten*[1] *Buch, daß, "wenn eine gerade Linie in gleiche und ungleiche Teile zerlegt wird, die Quadrate über den ungleichen Abschnitten das Doppelte der Quadrate über der Hälfte der gesamten Linie und über der kleinen Linie, die vom äußersten Ende dieser Hälfte bis zum Schnittpunkt geht, sind". Man benötigt eine Figur, um dieses dunkle Theorem zu verstehen; und wenn es verstanden ist, sagt der Student: Wozu kann es mir dienen, und was liegt mir daran? Er verleidet sich eine Wissenschaft, deren Nützlichkeit er nicht früh genug erkennt.*

Unmittelbar davor erwähnt er CLAIRAUT: *Der verstorbene Herr Clairaut stellte sich vor, den jungen Leuten die Anfangsgründe der Geometrie leicht beizubringen; er wollte zum Ursprung zurück und dem Verlauf unserer Entdeckungen und der Bedürfnisse, die sie erzeugten, folgen.*

LIGER faßte 1743 seine "Dissertation sur la Géométrie" so zusammen (LIGER 1743, S. 54-55): *Aus dem Inhalt dieser Dissertation geht hervor: daß die Elemente des Euklid und seiner Nachahmer in gewisser Hinsicht gut und nützlich sind, aber daß sie in anderen Teilen falsch und den Entdeckungen des Wesentlichen in der Geometrie schädlich sind. Daß diese Elemente Figuren zu allgemein behandeln, so daß man mittels ihrer folglich nicht dazu gelangen kann, sie vollkommen zu kennen.*

Im Oktober 1740 erschien im angesehenen "Journal des Sçavans" eine Besprechung des Buchs "Elémens de la Géométrie d'Euclide, reduits à l'essentiel de ses Principes, pour appliquer facilement la Théorie de cette Science à la pratique" von M. Freard du CASTEL (nicht zu verwechseln mit

---

[1] Dieser Lehrsatz findet sich im zweiten Buch der "Elemente" EUKLIDs, § 9.

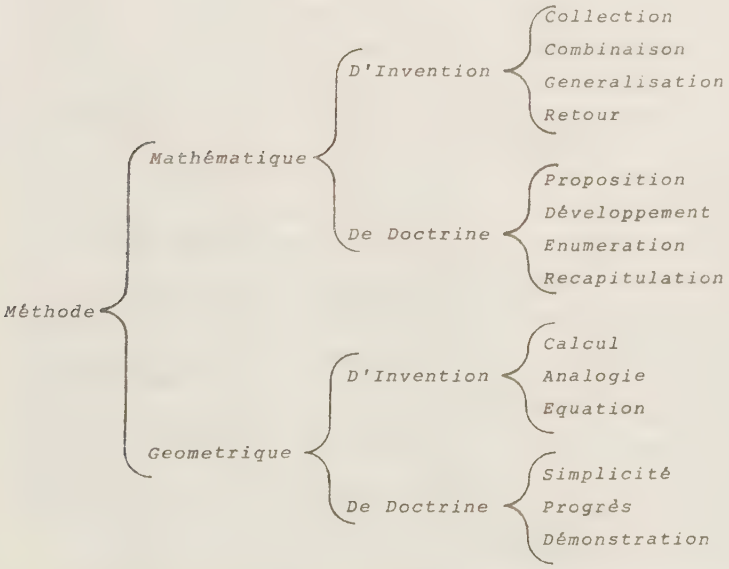
dem weiter oben erwähnten Jesuitenpater Louis-Bertrand CASTEL). Auch hier werden wieder die Hauptkritikpunkte an EUKLID aufgezählt: *Euklid ist wahrhaftig der Gesetzgeber der Geometrie ... Bis zur Mitte des letzten Jahrhunderts begnügte man sich mit der Lektüre seiner Kommentatoren, und man dachte nicht im geringsten daran, das Studium der Geometrie mit einer anderen Ordnung aufzunehmen als mit der, die Euklid uns vorschrieb. Aufgrund mehrerer Lehrsätze, die man als unnütz betrachtete oder von denen man nur wegen der Methode, der er gefolgt war, Gebrauch machte, glaubte man schließlich, darin einige Fehler zu finden. Man warf ihm hauptsächlich fehlende Ordnung und Klarheit vor, und daß die Verbindung der Ideen darin nicht erhalten blieb. Die Hauptankläger hoben hervor, daß er die Behauptungen, die die Flächen betrafen, mit denen der Linien vermischte, und daß er Dinge beweisen wollte, die keines Beweises bedurften. Man warf ihm außerdem vor, nie eine genügend genaue Idee der Lehrsätze gegeben zu haben, und sie auf einem zu schwierigen oder komplizierten Weg bewiesen zu haben.*

Zusammenfassend erscheint die Kritik an EUKLID im 18. Jahrhundert in Frankreich also als Fortsetzung der Kritk, die in den Jahrhunderten davor insbesondere von RAMUS und ARNAULD geübt wurde. Im 18. Jahrhundert wurde diese Kritik aber nicht nur von Mathematikern wie etwa Louis-Bertrand CASTEL, CLAIRAUT und LIGER getragen, sondern auch von Denkern der Aufklärung, wie etwa VOLTAIRE. Die Hauptkritikpunkte von ihnen an EUKLID waren: Trockenheit, Mangel an natürlicher Ordnung und Klarheit und fehlende ontologische Verankerung der Mathematik.

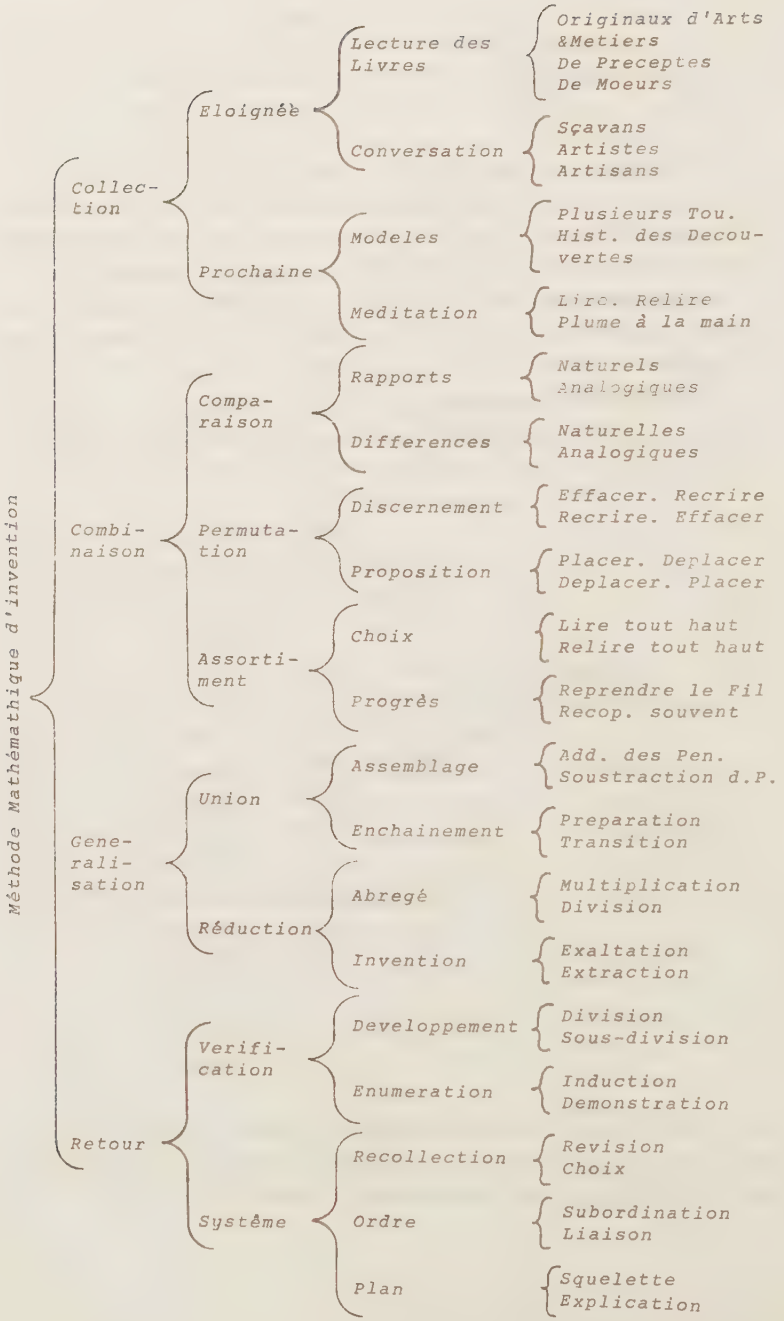
4.8.1 Anhang: zur Methodenlehre von L.-B. CASTEL

Die "Mathématique universelle, abregée à l'usage et à la portée de tout le monde" des Jesuitenpaters Louis-Bertrand CASTEL, insbesondere die in diesem Werk entwickelte Methodenlehre, scheint mir eine eigene Untersuchung wert zu sein. Da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, möchte ich an dieser Stelle nur stichpunktartig darauf eingehen.

Die ausführliche Entwicklung von CASTELs Methodenlehre führt im Verlauf des Buchs zu folgendem Schema (CASTEL 1728, S. 106):



Die Weiterentwicklung der "Méthode Mathématique d'Invention" führt schließlich zu folgendem Schema, in dem Aspekte der Heuristik des 20. Jahrhunderts wiederzufinden sind (S. 202):


Méthode Mathématique d'invention
Collection
Eloignée
Lecture des Livres
Originaux d'Arts &Metiers
De Preceptes
De Moeurs
Conversation
Sçavans
Artistes
Artisans
Prochaine
Modeles
Plusieurs Tou.
Hist. des Decouvertes
Meditation
Lire. Relire
Plume à la main
Combinaison
Comparaison
Rapports
Naturels
Analogiques
Differences
Naturelles
Analogiques
Permutation
Discernement
Effacer. Recrire
Recrire. Effacer
Proposition
Placer. Deplacer
Deplacer. Placer
Assortiment
Choix
Lire tout haut
Relire tout haut
Progrès
Reprendre le Fil
Recop. souvent
Generalisation
Union
Assemblage
Add. des Pen.
Soustraction d.P.
Enchainement
Preparation
Transition
Réduction
Abregé
Multiplication
Division
Invention
Exaltation
Extraction
Retour
Verification
Developpement
Division
Sous-division
Enumeration
Induction
Demonstration
Système
Recollection
Revision
Choix
Ordre
Subordination
Liaison
Plan
Squelette
Explication

Auch in dem folgenden Zitat sind die eben erwähnten Aspekte wiederzuerkennen (S. 200): *De toutes ces Parties, il y en a trois de principales, la 'Comparaison' qui est la Clef de l'Invention, la 'Reduction' qui est la découverte, & le 'Système' qui est comme la Découverte de la Découverte. Il faut unir les Veritez pour les rendre fecondes; & jamais on n'inventera que par la voye de l'Analogie & de la Comparaison.*

Die vier Hauptzweige der "Méthode Mathématique d'Invention" definiert CASTEL folgendermaßen (S. 98-99):
1°. La Collection consiste, pour celui qui veut inventer, à faire dans son esprit, un grand amas d'idées & de vûës qui lui servent, comme autant de lumieres, pour l'éclairer dans ses recherches.
2°. La Combinaison, consiste à assortir ensemble les veritez que l'on possede, d'une nouvelle maniere propre à en faire naître de nouvelles veritez.
3°. La Generalisation, remonte des veritez particulieres ainsi assorties aux generales, des Effets aux Causes, des Consequences aux Principes, du Détail à la Science.
4°. La Retour, ramene l'esprit du General au Détail, & du Principe à la Consequence, pour voir si l'on s'est trompé, & pour se mettre bien en possession de sa Découverte, & en état de la communiquer, & de l'établir.

Die besondere Bedeutung der "Collection" für die Wissenschaft wird im folgenden deutlich (S. 104): *Le Calcul & la Collection sont la Méthode du peuple, des enfans, des ignorans, des petits genies, qui ne pensent & n'apprennent qu'en détail, & par des Inductions. Dans les Sciences, la Collection & le Calcul ne font que des Compilateurs, toujours arrêtez à la porte de l'Invention.*

4.9 Zur Entstehung eines wissenschaftshistorischen Bewußtseins in Frankreich im 18. Jahrhundert

Bereits zu Beginn des 17. Jahrhunderts hatte Francis BACON auf die Notwendigkeit einer wissenschaftshistorischen Forschung hingewiesen. Diese Idee der Untersuchung wissenschaftshistorischer Fragen wurde zu Beginn des 18. Jahrhunderts in Frankreich wieder aufgegriffen und von den Denkern der Aufklärung in umfassender Weise in die Tat umgesetzt. Von den rund 60000 Artikeln der "Encyclopédie" von DIDEROT und D'ALEMBERT behandelt etwa jeder zehnte ein historisches Thema, etliche weitere nicht historische Artikel enthalten zumindest in Teilen historische Unterpunkte.

Dieses überwältigende Interesse der Aufklärung an allen historischen Fragestellungen kann nicht losgelöst betrachtet werden vom Interesse an der Methodologie der Wissenschaft. War die Methode für das 18. Jahrhundert sozusagen der "Vektor"[1], der den Wissenschaften den Weg wies von der Gegenwart in die Zukunft, so war die Wissenschaftsgeschichte der dazu antiparallele Vektor, der von der Gegenwart in die Vergangenheit wies. Dieser Zusammenhang wurde in der Aufklärung - und auch von BACON schon - immer wieder betont: Die Wissenschaftsgeschichte war nicht nur ein Kuriositätenkabinett voller menschlicher Irrtümer, sondern diente unter anderem dazu, dem Wissenschaftler der Gegenwart die Richtung zu weisen, nämlich entweder dieselbe Richtung, die der Wissenschaftler der Vergangenheit eingeschlagen hatte - falls seine Untersuchungen in der Gegenwart noch Gültigkeit besaßen -, oder eine Richtung, die die Fehler der Wissenschaftler der Vergangenheit bewußt zu vermeiden suchte.

Neben der "Encyclopédie", die, wie bereits erwähnt, weit-

---

[1] (GUSDORF 1977, S. 62).

gehend historisch orientiert war, erschien im Jahr 1758 eine erste "Geschichte der Mathematik" von MONTUCLA (1725 - 1799). Aus heutiger Sicht ist diese "Histoire des Mathématiques" sicherlich unvollständig, aber hier wurde zum ersten Mal die bereits ein halbes Jahrhundert vorher von Pierre Rémond de MONTMORT (1687 - 1719) geäußerte Idee, eine "Histoire de la géométrie" zu erstellen, durchgeführt. MONTUCLA berichtet im Vorwort seiner "Histoire des Mathématiques", daß MONTMORT diese "Histoire de la géométrie" selbst in Angriff genommen hatte, dann aber starb, ohne sie zu vollenden. Selbst die Manuskripte seien nicht erhalten geblieben. Ferner zitiert MONTUCLA einen Brief MONTMORTs an Nicolas BERNOULLI (MONTUCLA 1758, S. vij): *"Es wäre stark zu wünschen," sagt er in einem Brief an Herrn Nicolas Bernoulli, "daß jemand sich die Mühe machen wollte, uns zu lehren, wie und in welcher Reihenfolge die mathematischen Erfindungen aufeinander gefolgt sind, und wem wir sie verdanken. Man hat die Geschichte der Malerei erstellt, der Musik und der Medizin. Eine gute Geschichte der Mathematik, und insbesondere der Geometrie, wäre ein viel interessanteres und nützlicheres Werk. Welches Vergnügen hätte man nicht, wenn man die Verbindung der Methoden sähe, die Aufeinanderfolge der verschiedenen Theorien, beginnend mit den ersten Zeiten bis zu der unseren, in der diese Wissenschaft auf ein so hohes Niveau gebracht worden ist. Es scheint mir, daß ein derartiges Werk, wenn es gut gemacht wäre, als Geschichte des menschlichen Geistes angesehen werden könnte, da der Mensch gerade in dieser Wissenschaft, mehr als in jeder anderen, die Vortrefflichkeit dieser Gabe der Intelligenz erkennen ließ, die Gott ihm gegeben hat, um sich über alle anderen Kreaturen zu erheben."*

MONTUCLA verweist in seiner Begründung einer Geschichte der Wissenschaften ebenfalls auf BACON. Ferner stellt er die herkömmliche - mit Helden und Schlachten überfrachtete - Geschichtsschreibung in Frage (S. iij-iv): *Eines der Schauspiele, die einer philosophischen Betrachtung am würdigsten wären, ist ohne Widerspruch jenes der Entwicklung des mensch-*

lichen Geistes und der verschiedenen Zweige seiner Kenntnisse. Der berühmte Kanzler Bacon bemerkte es vor über einem Jahrhundert; und es ist diese Erklärung, die ihn die Geschichte, wie sie bis dahin geschrieben war, mit einem Stamm vergleichen ließ, der seiner vornehmsten Teile beschnitten worden ist. Ich weiß jedoch nicht, durch welches Mißgeschick dieser Zweig der Geschichte zu allen Zeiten vernachlässigt worden ist. Unsere Bibliotheken sind überfrachtet von weitschweifigen Erzählern über Belagerungen, Schlachten und Revolutionen; wie viele angebliche Helden haben sich nur dadurch hervorgetan, daß sie auf ihrem Weg eine Blutspur hinterlassen haben? Wie Plinius es mit Bedauern bemerkt, findet man kaum einen Schriftsteller, der sich vorgenommen hätte, der Nachwelt die Namen der Wohltäter des Menschengeschlechts zu überliefern, die auf der einen Seite daran gearbeitet haben, mit ihren nützlichen Erfindungen Bedürfnisse zu befriedigen, auf der anderen Seite die Fähigkeiten seines Verständnisses durch ihre Überlegungen und Forschungen auszudehnen. Noch weniger findet man welche, die daran gedacht haben, den Fortschritt dieser Erfindungen zu präsentieren, oder dem menschlichen Geist auf seinem Weg und in seiner Entwicklung zu folgen. Wäre eine derartige Tafel weniger interessant als jene des Schreckens und der blutigen Szenen, die der Ehrgeiz und die Boshaftigkeit der Menschen erzeugen?

MONTUCLA weist auch auf den Zusammenhang zwischen der Geschichte und der Weiterentwicklung der Wissenschaften hin. Er zitiert ein Fragment von MAIRAN (S. vi): *"Die historische Kenntnis der Tatsachen und Entdeckungen dient uns dazu, uns in unseren Arbeiten zu leiten; sie erspart uns die Mühe und die Zeit, die wir vielleicht erfolglos (und immer unnütz) verbringen würden, um uns Wege zu öffnen, die bereits geschlagen sind, und auf denen man nur noch voranschreiten muß; sie sichert den Erfindern den Ruhm der Erfindung; und sie degradiert jene, die sie sich ungerechterweise oder aus mangelnder Kenntnis zusprechen..."* MONTUCLA fährt selbst fort: *Es wäre mir ein leichtes, eine große Anzahl von Beispielen von Geometern zu zitieren, die, mangels genügender*

Kenntnis dessen, was man vor ihnen gemacht hat, bereits gefundene Dinge als Neuigkeiten ausgegeben haben, oder wertvolle Zeit mit bereits vollendeten Arbeiten verloren haben.

Das historische Interesse des 18. Jahrhunderts manifestierte sich nicht nur in Einzelwerken wie der "Histoire des Mathématiques" von MONTUCLA. FONTENELLE (1657 - 1757) machte sich aus eigener Initiative und mit Zustimmung seiner Kollegen gegen Ende des 17. Jahrhunderts bereits zum Geschichtsschreiber der "Académie des Sciences", im Jahr 1699 wurde er ihr "Secrétaire perpétuel". In dieser Eigenschaft verfaßte er die "Histoire de l'Académie Royale des Sciences", die zumeist jährlich erschien. Auch über die Zeit von der Gründung der Akademie bis zu seiner Ernennung zum Ständigen Sekretär im Jahr 1699 verfaßte er einen historischen Überblick. Er war ebenfalls für die Führung der Protokolle (Procès-Verbaux) der Akademiesitzungen zuständig (GUSDORF 1977, S. 51): *Die Sitzungsprotokolle der gelehrten Gesellschaften, die Aufsätze, die ihnen unterbreitet werden, die Berichte über erfolgte Forschungen, die gestellten Fragen, und die Antworten, oder das Fehlen der Antworten, bilden so nach Lage der Dinge ein kollektives Gedächtnis. Diese Archive, für alle geöffnet, präsentieren so das Antlitz der entstehenden Wissenschaft, und diese Geschichte der Gegenwart, deren Werden jene in ihren Bann schlägt, die an ihrem Abenteuer teilhaben, ist in natürlicher Weise solidarisch mit der Geschichte der Vergangenheit.*

Auch D'ALEMBERT betonte im "Discours préliminaire" der "Encyclopédie" die Wichtigkeit einer Geschichtsschreibung der Wissenschaften. Er sah die Gegenwart - die oft genug überbetont wird - nur als kurzen Übergang zwischen Vergangenheit und Zukunft (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751): *Es ist nicht genug für uns, mit unseren Zeitgenossen zu leben und sie zu beherrschen. Angeregt durch die Neugierde und durch den Ehrgeiz, und beim Versuch, durch eine natürliche Begierde auf einmal die Vergangenheit, die Gegenwart und die Zukunft zu umarmen, wünschen wir, zu gleicher Zeit zu leben mit denen,*

die uns folgen werden, und mit denen gelebt zu haben, die uns vorangegangen sind. So führt uns der Ursprung und das Studium der Geschichte, die uns mit den vergangenen Jahrhunderten durch das Schauspiel ihrer Unvollkommenheiten und ihrer Tugenden, ihrer Kenntnisse und ihrer Irrtümer verbindet, in die zukünftigen Jahrhunderte. Dadurch lernt man, die Menschen nur danach zu beurteilen, was sie Gutes tun, und nicht nach dem imposanten Apparat, der sie umgibt: Die Herrscher, diese ziemlich unglücklichen Menschen, weil jeder sich verschwört, ihnen die Wahrheit zu verbergen, können sich selbst bereits im voraus vor diesem redlichen und furchtbaren Tribunal beurteilen; das Zeugnis, das die Geschichte über ihre Vorgänger abgibt, ist das Abbild dessen, was die Nachwelt von ihnen sagen wird.

Als Folge dieses Interesses an den historischen Wurzeln der Wissenschaften traten im 18. Jahrhundert in Frankreich insbesondere die Bedürfnisse des Menschen wieder mehr in den Mittelpunkt. Ausgangspunkt aller Wissenschaft waren die Sinneseindrücke. War das Interesse des 17. Jahrhunderts noch gewesen, ein umfassendes in sich geschlossenes Wissenssystem zu schaffen, um damit an der göttlichen Vernunft teilzuhaben, so rückt nun der Mensch in den Mittelpunkt, es gilt als allererste Forderung, seine Bedürfnisse zu befriedigen. Immer wieder werden in der Aufklärung die "Bedürfnisse" und die "Neugier" des Menschen als initiierende Elemente der Wissenschaften genannt. So heißt es im Jahr 1746 bei LA CHAPELLE in seinen "Institutions de Géométrie" über die Arithmetik (LA CHAPELLE 1746, S. 59): *Die Arithmetik, ebenso wie alle anderen Wissenschaften, ist die Tochter der Bedürfnisse und der Neugier.*

BACHELARD beschreibt dies so (1938, S. 25): *Öffnen Sie ein wissenschaftliches Buch des 18. Jahrhunderts, und Sie werden selbst sehen, daß es im täglichen Leben verwurzelt ist. Der Autor konversiert mit seinem Leser wie ein Conférencier eines Salons. Er macht sich die Interessen und die natürlichen Sorgen zu eigen.*

Immer wieder wird - auch und gerade für die Mathematik - betont, daß der Ausgangspunkt jeder Wissenschaft der Sinneseindruck ist. So heißt es im "Discours préliminaire" der "Encyclopédie" (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751): *In der Tat, alle unsere Kenntnisse reduzieren sich primitiverweise auf Sinneseindrücke, die ungefähr in allen Menschen die gleichen sind; und die Kunst, diese direkten Ideen zu kombinieren und gegeneinander zu halten, fügt eigentlich zu diesen selben Ideen nur eine mehr oder weniger exakte Anordnung hinzu, und eine Aufzählung, die anderen mehr oder weniger sinnlich wahrnehmbar gemacht werden kann.*

LA CHAPELLE betont die Wichtigkeit der Sinneseindrücke auch für die Mathematik (1743, S. 13-14): *Die Geometer haben keine Linien, keine Oberflächen, keine Punkte als solche, die die Materie ihnen anbietet; sie messen das, was sie sehen, was sie berühren, was sie durchlaufen. Es ist also offensichtlich, daß die ersten Grundlagen der Geometrie auf der Materie ruhen, die unseren Sinnen am zugänglichsten ist; daß aller Unterschied zwischen einem normalen Menschen und demjenigen, der einige Kenntnis der Geometrie hat, darin besteht, daß der erste nicht über die ersten Schritte hinausgekommen ist, und daß der zweite ihrer Entwicklung gefolgt ist. Aber immer habe die Sinne dabei als Führer gedient.*

Und an anderer Stelle (S. 18): *In der Geometrie sind also die Sinne unsere ersten Meister, und sie behalten eine große Autorität in der ganzen Folge unserer Schlußfolgerungen.*

Mit dieser Betonung der Bedürfnisse der Menschen, ihrer Neugierde und der konkreten Sinneseindrücke geht einher eine gewisse Ablehnung der herkömmlichen "theoretischen" Mathematik, die kein konkretes ontologisches Fundament besitzt, die sich nicht an den Bedürfnissen des Menschen orientiert und von seinen Sinneseindrücken ausgeht, sondern sich an innerer Strenge und Vollständigkeit des Aussagensystems orientiert. Der herkömmlichen Mathematik ohne ontologisches

Pendant setzte das 18. Jahrhundert den "Primat der konkreten Existenz" entgegen (GUSDORF 1972, S. 246). Auch diese Forderung findet sich im "Discours préliminaire" der "Encyclopédie" (DIDEROT/D'ALEMBERT 1751): *Das erste, was uns unsere Sinne lehren, und was von ihnen gar nicht losgelöst betrachtet werden kann, ist unsere Existenz; ... Die zweite Kenntnis, die wir unseren Sinnen verdanken, ist die Existenz der äußeren Objekte ...*

Und als im Jahr 1748 DIDEROT und BUFFON das "Ende der Herrschaft der Mathematik" verkündeten, bezog sich ihre Aussage für GUSDORF auf die "theoretische" Mathematik (GUSDORF 1972, S. 251-252): *Als im Jahr 1748 Buffon und Diderot im gleichen Atemzug sagen, daß "die Herrschaft der Mathematik beendet ist", ... wollen sie sagen, daß wir nicht in der supralunaren Welt leben, in der die Mathematik herrscht ...; wir haben mit dem Leben zu tun, das nicht mathematisiert werden kann; es ist kein Zufall, daß Buffon, einer derjenigen, die in Frankreich den Infinitesimalkalkül Newtons verbreitet haben, diese Inkompetenz proklamiert. Auf einmal verliert die Mathematik ihren ... Status, den sie bis dahin hatte ...*

Die Entstehung des wissenschaftshistorischen Bewußtseins in Frankreich und - damit verbunden - die Rückbesinnung auf die Bedürfnisse des Menschen als Ausgangspunkt jeder Wissenschaft, auf die Sinneseindrücke als erstes Wissen und der Primat der konkreten Existenz weisen auf ein weiteres Motiv für CLAIRAUTs Wahl der Darstellungsform hin: CLAIRAUT wollte mit seinen beiden Lehrbüchern zeigen, daß die Mathematik sich nicht im ontologischen Vakuum abspielt - indem er von Straßen, Wällen, Plätzen, Geländen, Kaufleuten, Mischungen usw. spricht, die Anlaß zu mathematischen Untersuchungen geben; daß es die Bedürfnisse der Menschen waren, die die Mathematik entstehen ließen - CLAIRAUT weist z.B. explizit auf die Nilüberflutungen hin, die die Ägypter zwangen, jedes Jahr ihre Felder neu zu vermessen; und daß die Mathematik historischen Untersuchungen nicht nur zugänglich ist, sondern solche Untersuchungen auch nötig hat - nicht nur unter dem

Aspekt eines genetisch orientierten Mathematikunterrichts, sondern auch aus wissenschaftssoziologischer Sicht: CLAIRAUTs Lehrbücher beinhalten nicht eine stetig wachsende Menge ewiger mathematischer Weisheiten und Methoden, sondern es sind bei CLAIRAUT immer wieder "Unannehmlichkeiten", "Unbequemlichkeiten", "Nachteile" und "Irreführungen" bereits entwickelter Methoden, die zu weiteren Untersuchungen Anlaß geben, und die er positiv als Motivation in den Lernprozeß einbaut.

5 Resümee

Im Jahre 1741 veröffentlichte Alexis-Claude CLAIRAUT unter dem Titel "Elemens de geometrie" ein elementargeometrisches Lehrbuch, im Jahr 1746 folgte ein elementaralgebraisches unter dem Titel "Elemens d'algèbre". Beide Werke beschränkten sich auf ein elementares Niveau, um als grundlegende Lehrbücher für Anfänger diesen die ersten Anfangsgründe der Geometrie und der Algebra nahezubringen. Das Besondere an diesen Büchern ist nun, daß sie nicht mit Definitionen, Postulaten und Axiomen anfangen - wie etwa die "Elemente" des EUKLID -, sondern ausgehen von konkreten Problemen des menschlichen Lebens. Diese Probleme werden gelöst, verallgemeinert, auf Schwierigkeiten untersucht, spezialisiert, es werden analoge Probleme gestellt und gelöst, so daß der Leser immer motiviert ist, einer Untersuchung zu folgen, da er ja weiß, aus welchem Grund sie geschieht. Mit heutigen Worten: Die "Elêments de gêométrie" und die "Eléments d'algèbre" stellen die Geometrie und die Algebra in heuristisch-genetischer Form dar. Zu ihrer Zeit, in der Mitte des 18. Jahrhunderts, wurden die Werke allgemein, auch von den Denkern der Aufklärung, hoch geschätzt, eine Gegenbewegung gegen diese Darstellungsform setzte aber spätestens mit der Französischen Revolution ein.

Die Untersuchung der Frage, welche Beweggründe CLAIRAUT hatte, die Lehrbücher in eben dieser Darstellungsform zu verfassen, zeigt, daß die "Eléments de géométrie" und die "Eléments d'algèbre" mit ihrem spezifischem Darstellungsstil als konkrete Umsetzungen der damals herrschenden wissenschaftsmethodologischen und philosophischen Ideen gedeutet werden können.

Als These formuliert: CLAIRAUT hat die Lehrbücher "Eléments de géométrie" und "Eléments d'algèbre" in heuristisch-genetischer Form dargestellt, um

a) die herrschende wissenschaftliche Methode des 18. Jahrhunderts, die analytische Methode, auch auf die Mathematik und auf mathematische Lehrbücher zu übertragen und insbesondere zu beweisen, daß sich diese Methode auch für das Unterrichten von Mathematik eignet;

b) die Hauptideen und Strömungen des damaligen Zeitgeistes - der Aufklärung - mit der Mathematik zu verbinden und insbesondere zu zeigen, daß auch eine Wissenschaft wie Mathematik sich orientieren kann an
   - dem Primat der konkreten Existenz,
   - den menschlichen Bedürfnissen und den Sinneseindrücken als Ausgangspunkt aller Wissenschaften, und
   - einem allgemeinhistorischen als auch wissenschaftshistorischen Bewußtsein.

Diese beiden Motivkomplexe lassen sich nicht scharf voneinander abtrennen, da die Ideen der Aufklärung natürlich auch von Wissenschaftlern mitgetragen wurden. Auf der anderen Seite wurde die analytische Methode nicht nur von Wissenschaftlern favorisiert, sondern galt in der Aufklärung als d i e Methode schlechthin, Erkenntnisse zu gewinnen u n d darzustellen. Und schließlich läßt sich die Entstehung und Entwicklung der Aufklärung in Frankreich nicht von dem Wissenschaftler NEWTON und seiner analytischen Methode trennen.

Eine allgemeinere Untersuchung *über das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik* als die vorliegende spezielle Fallstudie über CLAIRAUTs Lehrbücher ist die Arbeit von G. SCHUBRING (SCHUBRING 1977), in der - parallel zur vorliegenden Arbeit - gezeigt wurde, daß das genetische Prinzip zusammen mit dem naturwissenschaftlich-mathematischen Denken - das ja wesentlich von NEWTON und vor ihm von GALILEI geprägt wurde - im 17. Jahrhundert entstanden ist.

Diese Arbeit sollte - in Anlehnung an das in der Einleitung gesetzte Ziel - ein Beitrag zur aktuellen Diskussion um das Bild der Mathematik sein. Abschließend möchte ich feststellen: Bereits vor über zweihundert Jahren hat der Mathematiker CLAIRAUT es gewagt, die Mathematik so darzustellen, wie sie entstanden ist (bzw. hätte entstehen können) - ein Wagnis, bei dem sich viele Mathematiker auch heutzutage noch vorkämen, als stünden sie *in der Unterhose auf der Straße* (FREUDENTHAL 1963).

Literaturverzeichnis

ADAM/TANNERY 1969

Adam, Charles und Paul Tannery (Hrsg.). *Oeuvres de Descartes*, Bd. 1. Paris: 1969.

ARNAULD 1854

Arnauld, Antoine. *La Logique, ou l'Art de penser.* Paris: 1854.

ARNAULD 1667

Arnauld, Antoine. *Nouveaux Elémens de Géométrie.* Paris: 1667.

BACHELARD 1938

Bachelard, Gaston. *La formation de l'esprit scientifique.* Paris: 1938.

BECKER 1964

Becker, Oskar. *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* Freiburg/München: 1964^2.

BERTRAND 1865

Bertrand, Joseph-Louis-François. "Clairault *(sic)* et la mesure de la terre." *Revue des Cours Scientifiques de la France et de l'étranger*, Numéro 4, 23 Décembre 1865.

BERTRAND 1902

Bertrand, Joseph-Louis-François. "Clairaut: Sa vie et ses travaux." *Eloges académiques*, 2^e série (1902), 231 - 261.

BEYSSADE 1972

Beyssade, Michelle. *Descartes*. Paris: 1972.

BEZOUT 1764/65

Bézout, Etienne. *Cours des mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine,* t. I. Paris: 1764/65.

BOSSUT 1773

Bossut, Abbé Charles. *Traité élémentaire d'algèbre.* Paris: 1773.

BOURBAKI 1971

Bourbaki, Nicolas. *Elemente der Mathematikgeschichte.* Göttingen: 1971.

BOUTROUX 1927

Boutroux, Pierre. *Das Wissenschaftsideal der Mathematiker.* Leipzig und Berlin: 1927.

BRUNET 1929 a

Brunet, Pierre. *Maupertuis: Etude biographique.* Paris: 1929.

BRUNET 1929 b

Brunet, Pierre. *Maupertuis: L'Oeuvre et sa place dans la pensée scientifique et philosophique du XVIII^{e} siècle.* Paris: 1929.

BRUNET 1931

Brunet, Pierre. *L'introduction des théories de Newton en France au XVIII^{e} siècle. Avant 1738.* Paris: 1931.

BRUNET 1952

Brunet, Pierre. *La vie et l'oeuvre de Clairaut (1713 - 1765).* Paris: 1952.

CAJORI 1914

Cajori, Florian. *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching.* New York: 1914.

CAMUS 1750

Camus, Charles-Etienne-Louis. *Cours de mathématiques, 2^e partie: Elémens de géométrie théorique et pratique.* Paris: 1750.

CASINI 1969

Casini, Paolo. "Le 'Newtonianisme' au siècle des Lumières." *Dix-huitième siècle,* t. I, 1969, 139 - 159.

CASSIRER 1973

Cassirer, Ernst. *Die Philosophie der Aufklärung.* Tübingen: 1973^3.

CASSIRER 1978

Cassirer, Ernst. *Descartes: Lehre - Persönlichkeit - Wirkung.* Hildesheim: 1978.

CASTEL 1728

Castel, Le P. Louis-Bertrand. *Mathématique universelle, abregée à l'usage et à la portée de tout le monde.* Paris: 1728.

CATALOGUE 1765

Catalogue des livres de la bibliothèque de M. Clairaut. Chez Le Clerc. Paris: 1765. (Katalog, der anläßlich des Verkaufs von Clairauts Bibliothek nach seinem Tod gedruckt wurde.)

CLAIRAUT 1741 a

Clairaut, Alexis-Claude. *Elemens de geometrie.* Paris (David fils): 1741.

CLAIRAUT 1741 b

Clairaut, Alexis-Claude. *Elemens de geometrie.* Paris (Lambert & Durand): 1741.

CLAIRAUT 1746

Clairaut, Alexis-Claude. *Elemens d'algèbre.* Paris: 1746.

CLAIRAUT 1749 a

Clairaut, Alexis-Claude. *Elementa geometriae ...* Venedig: 1749.

CLAIRAUT 1749 b

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens d'algèbre* (2^{e} éd.). Paris: 1749.

CLAIRAUT 1749 c

Clairaut, Alexis-Claude. "Du système du Monde dans les principes de la gravitation universelle." *Histoire de l'Académie Royale des Sciences 1745,* 1749, 329 - 364.

CLAIRAUT 1751

Clairaut, Alexis-Claude. *Elementi di geometria ...* Rom: 1751.

CLAIRAUT 1752

Clairaut, Alexis-Claude. *Anfangsgründe der Algebra ...* Berlin: 1752.

CLAIRAUT 1753 a

Clairaut, Alexis-Claude. *Anfangsgründe der Geometrie ...* Hamburg: 1753.

CLAIRAUT 1753 b

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens de géométrie,* seconde éd. Paris (David): 1753.

CLAIRAUT 1753 c

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens de géométrie,* seconde éd. Paris (Durand): 1753.

CLAIRAUT 1753 d

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens d'algèbre,* 3^e éd. Paris (David): 1753.

CLAIRAUT 1760

Clairaut, Alexis-Claude. *Gronden der Algebra.* Amsterdam: 1760.

CLAIRAUT 1763

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens d'algèbre,* 3^e éd. Paris (Durand): 1763.

CLAIRAUT 1765 a

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens de géométrie,* 3^e éd. Paris (Durand neveu): 1765.

CLAIRAUT 1765 b

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens de géométrie,* 3^e éd. Paris (C^ie des Libraires): 1765.

CLAIRAUT 1766

Clairaut, Alexis-Claude. *Elements of algebra.* London: 1766.

CLAIRAUT 1768

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens d'algèbre,* 4^e éd. Paris: 1768.

CLAIRAUT 1772

Clairaut, Alexis-Claude. *Poczatki geometryi ...* Wilno: 1772.

CLAIRAUT 1775

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens de géométrie,* 4^e éd. Paris: 1775.

CLAIRAUT 1797

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens d'algèbre,* 5^e éd. 2 vol. Paris: an V - 1797.

CLAIRAUT 1801 a

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens d'algèbre,* 6^e éd. 2 vol. Paris: an X - 1801.

CLAIRAUT 1801 b

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens d'algèbre,* dernière éd. 2 vol. Paris: an IX - an X = 1801.

CLAIRAUT 1830

Clairaut, Alexis-Claude. *Elémens de géométrie,* nouv. éd. Paris: 1830.

CLAIRAUT 1836

Clairaut, Alexis-Claude. *Elements of geometry ...* Dublin: 1836.

CLAIRAUT 1852

Clairaut, Alexis-Claude. *Eléments de géométrie,* réimprimés. Paris: 1852.

CLAIRAUT 1853

Clairaut, Alexis-Claude. *Eléments de géométrie,* nouv. éd. Paris: 1853.

CLAIRAUT 1856-57

Clairaut, Alexis-Claude. *Zasady geometryi.* 2 vol. Warschau: 1856-57.

CLAIRAUT 1881

Clairaut, Alexis-Claude. *Elements of geometry.* London: 1881.

CLAIRAUT 1920

Clairaut, Alexis-Claude. *Eléments de géométrie.* Paris: 1920.

COHEN 1958

Cohen, I. Bernard (Ed.). *Isaac Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy and related documents.* Cambridge (Mass.): 1958.

CONDILLAC 1798 a

Condillac, Etienne Bonnot de. *Essai sur l'origine des connoissances humaines, ouvrage où l'on réduit à un seul principe tout ce qui concerne l'entendement humaine.* Paris: an VI - 1798.

CONDILLAC 1798 b

Condillac, Etienne Bonnot de. "La Logique." *OEuvres de Condillac,* t. 22. Paris: 1798.

DAVIS/HERSH 1981

Davis, Philip J. und Reuben Hersh. *The mathematical experience.* Boston: 1981.

DESCARTES 1957

Descartes, René. *Abhandlung über die Methode.* Hamburg: 1957.

DIDEROT/D'ALEMBERT 1751 - 1780

Diderot, Denis und Jean le Rond d'Alembert (Hrsg.). *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des metiers, par une Société de gens de lettres.* Paris: 1751 - 1780.

DIEUDONNE 1974

Dieudonné, Jean A. "Sollen wir 'Moderne Mathematik' lehren?" *Mathematiker über Mathematik* (Hrsg. Michael Otte u.a.). Berlin, Heidelberg, New York: 1974. 403 - 416.

D'OCAGNE 1932

D'Ocagne, Maurice. *Hommes & choses de science, 2. série.* Paris: 1932.

DUCLOS 1737

Duclos, Le P. Jean-Antoine. *Elémens des mathématiques, contenant les élémens de géométrie, d'arithmétique, d'algèbre et d'analise.* Lion: 1737.

EUKLID 1980

Euklid. *Die Elemente: Buch I - XIII.* Darmstadt: 1980[7].

FREUDENTHAL 1963

Freudenthal, Hans. "Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?" *Der Mathematikunterricht,* Heft 4, November 1963, 5 - 29.

FREUDENTHAL 1979

Freudenthal, Hans. "Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht." *Beweisen im Mathematikunterricht* (Hrsg. W. Dörfler und R. Fischer). Wien - Stuttgart: 1979.

GALDEANO 1899

Galdeano, Zoel García de. "Quelques principes généraux sur l'enseignement mathématique." *L'enseignement mathématique,* 1899, t. I, 195 - 203.

GILLISPIE 1971

Gillispie, Charles Coulston (Hrsg.). *Dictionary of scientific biography.* New York: 1971.

GUSDORF 1977

Gusdorf, Georges. *Les sciences humaines et la pensée occidentale, t. I: De l'histoire des sciences à l'histoire de la pensée.* Paris: 1977[2].

GUSDORF 1967

Gusdorf, Georges. *Les sciences humaines et la pensée occidentale*, t. II: *Les origines des sciences humaines.* Paris: 1967.

GUSDORF 1969

Gusdorf, Georges. *Les sciences humaines et la pensée occidentale*, t. III: *La révolution galiléenne*, 2 Bände. Paris: 1969.

GUSDORF 1972

Gusdorf, Georges. *Les sciences humaines et la pensée occidentale*, t. V: *Dieu, la nature, l'homme au siècle des lumières.* Paris: 1972.

HAMEL 1912

Hamel, Frank. *An 18th century marquise, a study of Emilie Du Châtelet and her times.* London: 1912.

HARS 1727

"Eloge de M. NEUTON *(sic).*" *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, 1727, 151 - 172.

HARS 1741

Histoire de l'Academie Royale des Sciences, 1741, 97 - 98.

HARS 1746

Histoire de l'Academie Royale des Sciences, 1746, 87 - 91.

HARS 1765

"Eloge de M. Clairaut." *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, 1765, 144 - 159.

HOFMANN 1957

Hofmann, Joseph Ehrenfried. *Geschichte der Mathematik,* Bd. 3: *Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur Französischen Revolution.* Berlin: 1957.

ITARD 1939-40

Itard, Jean. "La géométrie de Port-Royal." *L'enseignement mathématique,* 38^{me} année, 1939 et 1940, 27 - 38.

JOURNAL DES SÇAVANS 1740

"Elemens de la Geométrie d'Euclide, reduits à l'essentiel de ses principes, pour appliquer facilement la Théorie de cette Science à la pratique, par M. Freard du Castel." (Buchbesprechung.) *Journal des Sçavans,* Oktober 1740, 650 - 651.

JOURNAL DES SÇAVANS 1741

"Elémens de Géométrie, par M. Clairaut." (Buchbesprechung.) *Journal des Sçavans,* Oktober 1741.

JOURNAL DES SÇAVANS 1747

"Elémens d'algèbre, par M. Clairaut." (Buchbesprechung.) *Journal des Sçavans,* Februar 1747, 94 - 103.

KAPUR 1970

Kapur, J. N. "Combinatorial Analysis and School Mathematics." *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 3, 1970, 111 - 127.

KLEIN 1899

Klein, Felix. "Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Bd. VII, 1, 1899, 126 - 138.

LA CHAPELLE 1746

La Chapelle, Abbé de. *Institutions de géométrie, enrichies de notes ... sur la nature et le développement de l'esprit humain, avec un Discours sur l'étude des mathématiques ... augmenté d'une réponse aux objections qu'on y a faites ...* Paris: 1746.

LACROIX 1805

Lacroix, Silvestre-François. *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier.* Paris: an XIV - 1805.

LAKATOS 1979

Lakatos, Imre. *Beweise und Widerlegungen: die Logik mathematischer Entdeckungen.* Braunschweig/Wiesbaden: 1979.

LANDAU 1965

Landau, Edmund. *Grundlagen der Analysis.* New York N.Y.: 1965^{4}.

LA REVUE 1907

"Préface aux 'Eléments de Géométrie' de Clairaut (1741)." *La Revue de l'Enseignement des Sciences,* 1907, 181 - 185.

LAROUSSE 1866

Larousse, Pierre. *Grand Dictionnaire Universel du XIX^{e} Siècle,* t. VII. Paris: 1866.

LEBESGUE 1957

Lebesgue, Henri. "Humbert, Jordan, Roberval, Ramus." *L'enseignement mathématique,* II^{e} série, tome III, 1957, 188 - 215.

LEGENDRE 1794

Legendre, Adrien-Marie. *Eléments de géométrie.* Paris: 1794 - an II.

LEIBNIZ 1840 - 90

Leibniz, Gottfried Wilhelm. *Die philosophischen Schriften.* Hrsg. C.J. Gerhardt. Leipzig: 1840 - 90.

LIGER 1743

Liger, Pierre. *Dissertation sur la Géométrie.* Paris: 1743.

MARIE 1886

Marie, Maximilien. *Histoire des sciences mathématiques et physiques,* t. 8. Paris: 1886.

MAZEAS 1758

Mazeas, Jean-Mathurin. *Elémens d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie, avec une introduction aux sections coniques.* Paris: 1758.

MONTUCLA 1758

Montucla, Jean-Etienne. *Histoire des Mathématiques.* Paris: 1758.

MONTUCLA 1799

Montucla, Jean-Etienne. *Histoire des mathématiques ... nouvelle édition, considérablement augmentée et prolongée jusque vers l'époque actuelle.* Paris: 1799 (an VII - an X).

NEWTON 1759

Newton, Isaac. *Principes mathématiques de la philosophie naturelle.* Paris: 1759.

OSSERMAN 1981

Osserman, Robert. "Structure vs. Substance: The Fall and Rise of Geometry." *The Two-Year College Mathematics Journal,* Vol. 12, No. 4, September 1981, 239 - 246.

PASCAL 1847

Pascal, Blaise. *Pensées de Blaise Pascal sur la religion et sur quelques autres sujets ...* Paris: 1847.

PERRAULT 1680

Perrault, Claude. *Essais de physique, ou Recueil de plusieurs traités touchant les choses naturelles.* Paris: 1680 - 1688.

POLYA 1966

Pólya, Georg. *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren,* Bd. 1. Basel und Stuttgart: 1966.

POLYA 1967 a

Pólya, Georg. *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren,* Bd. 2. Basel und Stuttgart: 1967.

POLYA 1967 b

Pólya, Georg. *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme.* Bern: 1967^2.

POLYA 1969

Pólya, Georg. *Mathematik und plausibles Schliessen,* Bd. 1: *Induktion und Analogie in der Mathematik.* Basel und Stuttgart: 1969^2.

POLYA 1975

Pólya, Georg. *Mathematik und plausibles Schliessen,* Bd. 2: *Typen und Strukturen plausibler Folgerung.* Basel und Stuttgart: 1975^2.

PRINGSHEIM 1898

Pringsheim, Alfred. "Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht." *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* Bd. VI, 1, 1898, 73 - 83.

PRINGSHEIM 1904

Pringsheim, Alfred. "Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. XIII, 1904, 357 - 382.

PROCES-VERBAUX 1740

Handschriftliches Sitzungsprotokoll der "Académie Royale des Sciences" vom 31.8.1740, S. 185.

PROCES-VERBAUX 1746

Handschriftliches Sitzungsprotokoll der "Académie Royale des Sciences" vom 20.7.1746, S. 206 - 208.

REGISTRES 1740

Registres de l'Académie Royale des Sciences du 31. Août 1740.

SAVERIEN 1753

Savérien, Alexandre. *Dictionnaire Universel de Mathematique et de Physique*. Paris: 1753.

SCHUBRING 1977

Schubring, Gert. *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Dissertation Universität Bielefeld. Bielefeld: 1977.

SERGESCU 1947 - 48

Sergescu, Petre. "La litterature mathématique dans la première période (1665-1701) du 'Journal des Savants'." *Archives internationales d'histoire des sciences*, 1947 - 48, 60 - 99.

SPIVAK 1975

Spivak, Michael. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 5. Boston: 1975.

STEINMANN 1913

Steinmann, H. Gustav. *Über den Einfluss Newtons auf die Erkenntnistheorie seiner Zeit.* Dissertation Universität Bonn. Bonn: 1913.

TATON 1951

Taton, René. "Les Mathématiques selon l'Encyclopédie." *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications,* N° 3-4-1951.

TATON 1952

Taton, René. "Les méthodes en Mathématiques au XVIII^e siècle et au début du XIX^e siècle." *Actualités scientifiques et industrielles,* Série Philosophie, VIII: Histoire des Sciences, 1952.

TATON 1958

Histoire Générale des Sciences, t. 2: *La Science Moderne.* Collection publiée sous la direction de René Taton. Paris: 1958.

TATON 1964

Taton, René (Direction). *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII^e siècle.* Paris: 1964.

TATON 1976

Taton, René. "Inventaire chronologique de l'oeuvre d'Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)." *Revue de l'Histoire des Sciences,* 1976-xxix/2, 97 - 122.

THOM 1970

Thom, René. "'Moderne' Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum?" *Mathematiker über Mathematik* (Hrsq. Michael Otte u.a.). Berlin, Heidelberg, New York: 1974. 371 - 401. (Der französische Originaltext erschien 1970.)

THOM 1973

Thom, René. "Moderne Mathematik: Gibt es das?" *Didaktik der Mathematik*, 1(1973), 251 - 263.

VOLTAIRE 1878

Voltaire, François-Marie de Arouet, genannt Arouet de. "Dictionnaire philosophique." *OEuvres complètes de Voltaire*, t. XVII-XX. Edition Garnier. Paris: 1878 - 1879.

VOLTAIRE 1879

Voltaire, François-Marie de Arouet, genannt Arouet de. "Lettres philosophiques." *OEuvres complètes de Voltaire*, t. 22: *Mélanges*. Edition Garnier. Paris: 1879 - 1880.

VOLTAIRE 1880

Voltaire, François-Marie de Arouet, genannt Arouet de. "Correspondance." *OEuvres complètes de Voltaire*, t. XXXIII-L. Edition Garnier. Paris: 1880 - 1882.

VOLTAIRE 1883

Voltaire, François-Marie de Arouet, genannt Arouet de. "Memoires." *OEuvres complètes de Voltaire*, t. I: *Etudes et documents biographiques*. Edition Garnier. Paris: 1883.

WADE 1971

Wade, Ira O. *The Intellectual Origins of the French Enlightenment*. Princeton (New Jersey): 1971.

WALUSINSKI 1957

Walusinski, Gilbert. "Au pays de Clairaut et de Bourbaki." *L'enseignement mathématique*, II^{e} série, tome III, 1957, 289 - 297.

WHEWELL 1840

Whewell, William. *Geschichte der inductiven Wissenschaften, der Astronomie, Physik, Mechanik, Chemie, Geologie etc., von der frühesten bis zu unserer Zeit.* Stuttgart: 1840.

WITTMANN 1980

Wittmann, Erich. *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig/Wiesbaden: 1980[6].

HANS-JOACHIM SANDER

Lebenslauf

15.5.1949	Geboren in Castrop-Rauxel als Sohn des Pressestenographen Hans Sander und seiner Ehefrau Elfriede, geborene Hupfer.
1955 - 1959	Besuch der Volksschule in Castrop-Rauxel.
1959 - 1967	Besuch des Adalbert-Stifter-Gymnasiums in Castrop-Rauxel. Abschluß mit der Reifeprüfung.
1967 - 1969	Ableistung des Wehr- bzw. Zivilen Ersatzdienstes.
1969 - 1975	Studium der Mathematik, Physik, Philosophie und Pädagogik an den Universitäten Bochum und Dortmund und an der Pädagogischen Hochschule Ruhr, Abteilung Dortmund.
1975	Erste Philologische Staatsprüfung im Fach Mathematik.
1975 - 1977	Referendardienst am Otto-Hahn-Gymnasium in Herne. Abschluß mit der Zweiten Philologischen Staatsprüfung.
1977	Erste Philologische Staatsprüfung im Fach Philosophie.
1977 - 1979	Tätigkeit als Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Seminar für Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Ruhr, Abteilung Dortmund.
1979	Ernennung zum Wissenschaftlichen Assistenten.